47

Ma: 0. 47/3.

V. a. No

Die

reine und angewandte

Elementar-Mathematik.

Ein

vollständiges Lehrbuch

zum

Selbstunterrichte

und

zum Gebrauche bey

Vorlesungen in Civil- und Militärschulen,

eingerichtet und verfaßt

von

Joseph Schmoelzl,

königlich bayerischer Artillerie-Lieutenant bey der Zeughaus-Haupt-Direktion zu München,
Inspektions-Offizier der königlichen Militär-Pulverfabriken.

III. Theil.

Die Trigonometrie.

München 1833.

In Commission bey Georg Franz.

Die

ebene und sphärische

Trigonometrie.

Ein

vollständiges Lehrbuch

zum

Selbstunterrichte

und

zum Gebrauche bey

Vorlesungen in Civil- und Militärschulen,

eingerichtet und verfaßt

von

Joseph Schmoelzl,

königlich bayerischer Artillerie-Lieutenant bey der Zeughaus-Haupt-Direktion zu München,

Inspektions-Offizier der königlichen Militär-Pulverfabriken.

BIBLIOTHEK DES K. B. INFANT. REGIMENTS ERBGROSSHERZOG VON HESSEN.

Mit III Steintafeln.

München 1833.

In Commission bey Georg Franz.

Seiner Hoheit

dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

Maximilian,

Herzog in Bayern ꝛc. ꝛc.,

in unterthänigst tiefster Ehrfurcht gewidmet

von

dem Verfasser.

Vorwort.

Meiner ersten Ankündigung getreu erscheint hier zu der bereits erschienenen Arithmetik und Geometrie mein Lehrbuch der Trigonometrie als dritter Theil der Elementar-Mathematik.

Dasselbe besteht aus zwey Abtheilungen, wovon die erste die reine, und die zweyte die angewandte Trigonometrie lehrt.

Die erstere dieser Abtheilungen zerfällt wieder in drey Hauptstücke:

1) die Erklärungen und Verhältnisse der trigonometrischen Funktionen,

2) die reine ebene Trigonometrie,

3) die reine sphärische Trigonometrie;

so wie auch der angewandte Theil wieder in zwey Hauptstücke geschieden wird, als:

1) die angewandte ebene Trigonometrie,

2) die angewandte sphärische Trigonometrie.

Aufgemuntert durch die schmeichelhaftesten Auszeichnungen, womit ich nach dem Erscheinen meiner Lehrbücher über Arithmetik und Geometrie von Allerhöchsten und Höchsten Herrschaften beglückt wurde, und durch die vielseitig vortheilhafte Würdigung dieser Lehrbücher von Wissenschaftlichgebildeten, scheute

ich auch bey der Bearbeitung dieses wichtigen Theils der Mathematik weder Mühe noch Kosten.

Als die hierbey vorzüglich behülflich gewesenen Autoren nenne ich: Vega, Unger, Magold, Unruh, Tobias Mayer, Schulze u. a.

Das in diesem Lehrbuche befolgte System schien mir, durch mehrjährige Erfahrung bestätiget, stets zweckmäßigst.

Nur in wenig Lehrbüchern der Trigonometrie findet man praktische Aufgaben über Anwendung des sphärischen Theils, worin der Grund liegt, daß Schüler so bald die Liebe für diese Wissenschaft verlieren, indem sie keinen Nutzen, keine Anwendung ersehen.

Deßhalb habe ich für nothwendig erkannt, nach Vorausschickung der nöthigen Erklärungen, Beyspiele aus der mathematischen Geographie, Nautik, Gnomonik und Astronomie anzuführen.

Möge man auch diesen Theil der Mathematik nach Verdienst würdigen, welcher das, von mir im

vergangenen Jahre begonnene Werk: „die reine und angewandte Elementar-Mathematik," zu ergänzen bestimmt ist, und den bereits erschienenen zwey Theilen desselben: „die Elementar-Arithmetik," und „die Elementar-Geometrie," in seiner Vollständigkeit nicht nachstehen soll.

München, im November 1832.

Der Verfasser.

Inhalts-Anzeige.

Seite.

Einleitung.

Von der Trigonometrie im Allgemeinen 1

I. Abtheilung.

Die reine Trigonometrie.

I. Hauptstück: Die trigonometrischen Linien.

1ter Abschnitt: Die Erklärung der trigonometrischen Linien 5

A. Der Sinus 5

B. Der Cosinus 6

C. Der Sinusversus 8

Seite.

D. Der Cosinusversus 8

E. Die Tangente 9

F. Die Cotangente 10

G. Die Secante 11

H. Die Cosecante 12

2ter Abschnitt: Die Verhältnisse der trigonometrischen Linien.

A. Die Vergleichungen trigonometrischer Linien mit andern im Kreise vorkommenden Linien 13

B. Analytische Herleitung der Formeln für die trigonometrischen Linien,

a) Die Formeln für einfache Winkel . 18

b) Die Formeln für zusammengesetzte Winkel 24

C. Von den trigonometrischen Tabellen.

a) Erklärungen 38

b) Berechnung der trigonometrischen Linien mit Hülfe der Elementar-Mathematik 40

II. Hauptstück: Die reine ebene Trigonometrie.

1ter Abschnitt: Berechnung der Seiten und Winkel in ebenen Dreyecken.

A. In rechtwinklig-ebenen Dreyecken . . 44

B. In schiefwinklig-ebenen Dreyecken . . 47

Seite.

2ter Abschnitt: Berechnung der Flächeninhalte ebener Dreyecke.

A. In rechtwinklig-ebenen Dreyecken . . . 58

B. In schiefwinklig-ebenen Dreyecken . . . 60

III. Hauptstück: Die reine sphärische Trigonometrie.

1ter Abschnitt: Berechnung der Seiten und Winkel in sphärischen Dreyecken.

A. Vorkenntnisse 64

B. Rechtwinklig-sphärische Dreyecke . . . 65

C. Schiefwinklig-sphärische Dreyecke . . . 74

2ter Abschnitt: Berechnung der Flächeninhalte sphärischer Dreyecke 84

3ter Abschnitt: Reduktion der sphärischen Dreyecke auf die entsprechenden Sehnendreyecke . . . 86

II. Abtheilung.

Die angewandte Trigonometrie.

I. Hauptstück: Die angewandte ebene Trigonometrie, oder die trigonometrische Terrainaufnahme.

1ter Abschnitt: Vorkenntnisse.

Erfordernisse zur trigonometrischen Terrainaufnahme 93

Seite.

2ter Abschnitt: Trigonometrische Vermessungen der Linien, Winkel und Flächen.

A. Das Messen von Linien und Winkel . . . 95

B. Das Messen von Flächen 106

II. Hauptstück: Die angewandte sphärische Trigonometrie.

1ter Abschnitt: Vorkenntnisse 109

2ter Abschnitt: Aufgaben aus der mathematischen Geographie, Nautik, Gnomonik und Astronomie 115

Die

Trigonometrie.

Einleitung.

Von der Trigonometrie im Allgemeinen.

§. 1.

Die Trigonometrie (trigonometria) ist die Wissenschaft der Dreyecke, indem sie mit Hülfe dreyer gegebenen Stücke eines Dreyeckes die übrigen zu finden lehrt. Unter diesen drey gegebenen Stücken muß sich aber wenigstens eine der Seiten befinden, weil nach der Geometrie zur Bestimmung der Dreyecke dieses nothwendig ist, und ein Dreyeck durch die drey Winkel bloß der Form, aber nicht seiner Größe nach bestimmt wäre *).

§. 2.

Zur Bestimmung der fehlenden Stücke in einem Dreyecke werden die Winkel durch gewisse Linien (Funktionen) ausgedrückt, welche man trigonometrische Linien oder trigonometrische Funktionen nennt.

*) Man sehe hierüber in dem 2ten Theile meiner Elementar-Mathematik §. 49. Zus. 6., §. 50. Zus. 1. und §. 51. Zus. 1.

§. 3.

Ebenso, wie jede mathematische Wissenschaft, zerfällt auch die Trigonometrie in reine und angewandte Trigonometrie.

Die Trigonometrie heißt eben, (trigonometria plana), wenn sie ebene Dreyecke, und sphärisch, (trigonometria sphaerica), wenn sie sphärische Dreyecke (§. 42. im 2ten Theile der Elementar-Mathematik), zum Gegenstande hat.

Erste Abtheilung.

Die reine Trigonometrie.

I. Hauptstück.

Die trigonometrischen Linien.

I. Abschnitt.

Die Erklärung der trigonometrischen Linien.

§. 4.

Die trigonometrischen Linien, durch welche die Größe der Winkel oder Bögen ausgedrückt wird, sind: 1) der Sinus, 2) der Cosinus, 3) der Sinusversus, 4) der Cosinusversus, 5) die Tangente, 6) die Cotangente, 7) die Secante und 8) die Cosecante.

A. Der Sinus.

§. 5.

Wenn man in einem beliebigen Winkel die beiden Schenkel mit einem beliebigen Radius durch den dazu gehörigen Kreisbogen abschneidet, und von dem Endpunkte des einen Schenkels auf den andern Schenkel eine Senkrechte fällt, so wird letztere der Sinus (Sinus) des Winkels oder seines dazu gehörigen Bogens genannt. Z. B. Fig. 1 ist A B der Sinus von dem Winkel A C D oder auch von dem Bogen AD, und man sagt sodann AB = sin. ACD = sin. arc. A D.

Zusätze:

1) Betrachtet man den Winkel ACD (Fig. 1) als veränderlich, so daß sich AC in seiner Neigung gegen CD verrücken läßt, so ist sin. 0° = 0, sin. DCE = sin. 90° = CE = r (dem Radius), sin. DCF = sin. 180° = 0, sin. (erh. DCG) = sin. 270° = — CG = — r, weil CG in Bezug auf CE ganz entgegengesetzt liegt (§. 214 des 2ten Theils meiner Elementar-Mathematik), und endlich sin. 360° = 0. Den Sinus von 90° = r nennt man auch den *sinus totus*.

2) Es nimmt demnach im ersten und dritten Quadranten der Sinus auch mit der Größe des Winkels zu, und im zweyten und vierten eben so ab (Zus. 1).

3) Im ersten und zweyten Quadranten sind die Sinus der Winkel positiv, im dritten und vierten aber negativ (Zus. 1).

4) Um den Sinus eines stumpfen Winkels, z. B. von DCH, zu erhalten, muß man einen Schenkel CD bis an die Peripherie verlängern, und HI senkrecht darauf ziehen, so ist HI = sin. DCH.

5) Es haben demnach zwey Nebenwinkel oder Supplements-Winkel gleiche und übereinstimmende Sinus (Zus. 3 und 4), z. B. sin. DCH = sin. FCH = HI.

6) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke die Hypothenuse als Radius betrachtet, so ist jede der Katheten der Sinus des ihr gegenüberstehenden Winkels, d. h. beschreibt man (Fig. 2) mit AC aus A und C die Bögen CD und AE, so ist BC = sin. x und AB = sin. y.

B. Der Cosinus.

§. 6.

Der Cosinus (*cosinus*) eines Winkels oder Bogens ist nichts anders als der Sinus vom Complemente dieses Winkels oder Bogens; d. h. ist (Fig. 1) ACE das Complement

von ACD, so ist AK = sin. ACE = cos. ACD = cos. arc. AD.

Zusätze:

1) Der Cosinus eines Winkels ist demnach derjenige Theil des Radius, welcher zwischen dem Scheitel des Winkels und dem Durchschnittspunkte des Sinus mit dem Radius sich befindet; denn (Fig. 1) AK = BC (2ter Theil §. 51 Zus. 5).

2) Betrachtet man, wie in §. 5 den Sinus, jetzt auch den Cosinus nach der im 1ten Zusatze gegebenen Definition in den verschiedenen Quadranten, so ist cos. 0° = CD = r, cos. 90° = 0, cos. 180° = — CF = — r (weil CF in Beziehung auf CD entgegengesetzt liegt), cos. 270° = 0, und cos. 360° = CD = r.

3) Es nimmt daher im ersten und dritten Quadranten mit der Zunahme des Winkels der Cosinus ab, im zweyten und vierten Quadranten aber eben so zu (Zus. 2).

4) Im ersten und vierten Quadranten sind die Cosinus der Winkel positiv, im zweyten und dritten aber negativ (Zus. 2).

5) Von einem stumpfen Winkel DCH (Fig. 1) findet man den Cosinus, wenn man zuvor den Sinus HI construirt (§. 5 Zus. 4), und dann das Stück CI des Radius CF nimmt, welches zwischen dem Scheitel und Sinus des Winkels liegt; d. h. cos. DCH = — CI (Zus. 1 u. 4).

6) Nebenwinkel oder Supplementswinkel haben gleiche, aber entgegengesetzte Cosinus, indem der des spitzen Winkels positiv, jener des stumpfen aber negativ ist (Zus. 5).

7) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke die Hypothenuse als Radius betrachtet, so ist jede Kathete der Cosinus des ihr anliegenden spitzen Winkels; d. h. wenn man Fig. 2 mit AC aus A und C die Bögen CD und AE beschreibt, so ist AB = cos. x und BC = cos. y (Zus. 1).

C. Der Sinusversus.

§. 7.

Der Sinusversus oder Quersinus eines Winkels oder Bogens wird derjenige Theil des Radius genannt, welcher zwischen dem Endpunkte des Radius oder Diameters und dem Durchschnittspunkte des Sinus mit dem Radius liegt; d. h. (Fig. 1) BD = sin. vers. ACD = sin. vers. arc. AD.

Zusätze:

1) Es ist demnach sin. vers. 0° = 0, sin. vers. 90° = CD = r, sin. vers. 180° = DF = 2 r, sin. vers. 270° = CD = r, und sin. vers. 360° = 0.

2) Es wächst also mit der Größe des Winkels bis zu 180° auch der Sinusversus so, daß er dem Diameter gleich wird, und von hier aus bis zu 360° nimmt er wieder so ab, daß er = 0 wird (Zus. 1).

3) Der Sinusversus ist für alle Winkel, in den verschiedenen Quadranten betrachtet, positiv (Zus. 1).

4) Die Sinusversus zweyer Nebenwinkel oder Supplementswinkel ergänzen einander immer zu der Größe des Diameters; denn (Fig. 1) sin. vers. DCH = DI und sin. vers. FCH = FI, folglich sin. vers. DCH + sin. vers. FCH = DI + FI = 2 r.

D. Der Cosinusversus.

§. 8.

Cosinusversus oder Quercosinus eines Winkels oder Bogens nennt man den Sinusversus seines Complementwinkels; d. h. (Fig. 1) ist ACE das Complement von ACD, so ist EK = sin. vers. ACE = cos. vers. ACD = cos. vers. arc. AD.

Zusätze:

1) Diesem nach ist cos. vers. 0° = CE = r, cos. vers. 90° = 0, cos. vers. 180° = CE = r, cos. vers. 270° = EG = 2 r, und cos. vers. 360° = CE = r.

2) Im ersten und vierten Quadranten nimmt der Cosinusversus ab, im zweyten und dritten aber zu (Zus. 1).

3) Der Cosinusversus ist in allen vier Quadranten positiv (Zus. 1).

E. Die Tangente.

§. 9.

Wenn man die beyden Schenkel eines Winkels mit einem beliebigen Radius durch den dazu gehörigen Kreisbogen abschneidet, in dem Endpunkte des einen Schenkels auf diesen eine Senkrechte errichtet, und dann bis an den verlängerten andern Schenkel zieht, so heißt diese Senkrechte die Tangente (tangens) des Winkels oder Bogens. So ist z. B. (Fig. 3) BD = tg. ACD = tg. arc. AD.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Tangente in den verschiedenen Quadranten, so erhält man: tg. 0° = 0, tg. 90° = ∞ (unendlich), tg. 180° = 0, tg. 270° = — ∞, und tg. 360° = 0.

2) Die Tangente nimmt im ersten und dritten Quadranten mit der Größe des Winkels zu, bis sie unendlich wird, im zweyten und vierten Quadranten aber ab, bis sie zu 0 wird (Zus. 1).

3) Für die Winkel im ersten und dritten Quadranten sind die Tangenten positiv, für jene im zweyten und vierten aber negativ (Zus. 1).

4) Um die Tangente eines stumpfen Winkels, z. B. von DCF, zu erhalten, muß man den einen Schenkel CF so weit rückwärts verlängern, bis diese Verlängerung die in D auf CD errichtete Senkrechte DH in H schneidet, so ist dann DH die Tangente von DCF, und zwar ist tg. DCF = — DH (Zus. 3).

5) Nebenwinkel oder Supplementswinkel haben gleiche, aber entgegengesetzte Tangenten, wovon diejenige des stumpfen Winkels negativ ist; denn nach der gegebenen

Erklärung ist GI die Tangente von GCF und DH jene von DCF; nun ist GCI = DCH, IGC = R = CDH und CG = CD, folglich △ GCI ≅ △ DCH, woraus GI = DH. Daß endlich die Tangente GI positiv und DH negativ ist, folgt aus Zusatz 3.

6) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke eine der Katheten als Radius betrachtet, so ist die andere Kathete die Tangente des ihr gegenüberstehenden Winkels; d. h. beschreibt man (Fig. 2) mit AB aus A oder mit BC aus C die Bögen BG oder BF, so ist BC = tg. x oder AB = tg. y.

F. Die Cotangente.

§. 10.

Die Tangente des Complements eines Winkels heißt die Cotangente dieses Winkels (Fig. 3). Ist demnach ACE das Complement von ACD, so ist EK = tg. ACE = cotg. ACD = cotg. arc. AD.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Cotangente in den verschiedenen Quadranten, so zeigt sich: cotg. 0° = ∞, cotg. 90° = 0, cotg. 180° = — ∞, cotg. 270° = 0 und cotg. 360° = ∞.

2) Die Cotangente nimmt im ersten und dritten Quadranten mit der Zunahme des Winkels ab, im zweyten und vierten aber ebenfalls zu (Zus. 1).

3) Für die Winkel im ersten und dritten Quadranten ist die Cotangente positiv, für jene im zweyten und vierten aber negativ (Zus. 1).

4) Man findet die Cotangente eines stumpfen Winkels z. B. von DCF, wenn man CE in C auf CD, dann EL in E auf CE senkrecht errichtet, und letztere Senkrechte so weit verlängert, bis sie den verlängerten Schenkel CF in L schneidet, so ist cotg. DCF = — EL

(Zus. 3); denn ECF ist das Complement von DCF (Erklärung).

5) Nebenwinkel oder Supplementswinkel haben gleiche, aber entgegengesetzte Cotangenten, wovon diejenige des stumpfen Winkels negativ ist; denn (Fig. 3) cotg. DCF = — EL, und cogt. GCF = + EL (Erkl. und Zus. 3).

6) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke eine der Katheten als Radius betrachtet, so ist die andere Kathete die Cotangente des ihr anliegenden spitzen Winkels; d. h. (Fig. 2), wenn man mit AB aus A oder mit BC aus C die Bögen BG oder BF beschreibt, so ist AB = cotg. x und BC = cotg. y; denn x und y sind sich gegenseitig Complemente.

G. Die Secante.

§. 11.

Wenn man nach §. 10 zu einem Winkel oder Bogen die Tangente zieht, so heißt der verlängerte Schenkel, welcher die Tangente schneidet, die Secante (secans) dieses Winkels oder Bogens. So ist z. B. (Fig. 3) BC = sec. ACD = sec. arc. AD.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Secante in den verschiedenen Quadranten, so bekömmt man sec. 0° = r, sec. $90^\circ = \infty$, sec. 180° = — r, sec. $270^\circ = \infty$ und sec. 360° = r.

2) Die Secante wächst im ersten und dritten Quadranten mit dem Winkel, bis sie unendlich wird, und nimmt im zweyten und vierten bis auf die Größe des Radius ab (Zus. 1).

3) Die Secanten sind für Winkel im ersten und vierten Quadranten positiv, für jene im zweyten und dritten aber negativ (Zus. 1).

4) Um die Secante eines stumpfen Winkels, z. B. von DCF (Fig. 3), zu erhalten, muß man den einen Schenkel CF so weit rückwärts verlängern, bis diese Verlän-

gerung die in D auf CD errichtete Tangente DH in H schneidet, so ist dann CH die Secante von DCF, und zwar ist sec. DCF = — CH, weil der Schenkel CF rückwärts verlängert werden mußte (Zus. 3).

5) Nebenwinkel oder Supplementswinkel haben gleich große, aber entgegengesetzte Secanten, von welchen diejenige des stumpfen Winkels negativ ist; denn betrachtet man die, sich zu Nebenwinkel ergänzenden Winkel DCF und GCF, so ist CD = CG, DCH = GCI und CDH = R = CGI, folglich △ CDH ≅ △ CGI, woraus CH = CI. CH ist nun die Secante von DCF und CI jene von GCF, mithin haben beyde Winkel gleiche Secanten. Daß aber auch endlich sec. DCF = — CH und sec. GCF = + CI ist, folgt aus Zusatz 3.

6) Wenn man in einem rechtwinklichen Dreyecke eine der Katheten als den Radius betrachtet, so ist die Hypothenuse die Secante des, dem Radius anliegenden spitzen Winkels. Ist z. B. (Fig. 2) BC der Radius, so ist AC = sec. y, und ist AB der Radius, so ist AC = sec. x.

H. Die Cosecante.

§. 12.

Die Secante des Complements eines Winkels wird die **Cosecante** (cosecans) dieses gegebenen Winkels genannt; d. h. ist (Fig. 3) ACE das Complement von ACD, so ist CK = cosec. ACD = cosec. arc. AD.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Cosecante in den verschiedenen Quadranten, so zeigt sich: cosec. 0° = ∞, cosec. 90° = r, cosec. 180° = ∞, cosec. 270° = — r und cosec. 360° = ∞.

2) Die Cosecante nimmt im ersten und dritten Quadranten mit der Zunahme des Winkels bis auf die Größe

des Radius ab, wächst aber im zweyten und vierten Quadranten bis zur Unendlichkeit an (Zus. 1).

3) Die Cosecanten sind für Winkel im ersten und zweyten Quadranten positiv, für jene im dritten und vierten aber negativ (Zus. 1).

4) Nebenwinkel oder Supplementswinkel haben ganz gleiche Cosecanten (Erkl. und Zus. 3).

5) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke eine der Katheten als Radius betrachtet, so ist die Hypothenuse die Cosecante des dem Radius gegenüberstehenden Winkels; d. h. (Fig. 2) $AC = \text{cosec. } y$, wenn $AB = r$, oder $AC = \text{cosec. } x$, wenn $BC = r$; denn x und y sind sich gegenseitig Complemente.

II. Abschnitt.

Die Verhältnisse der trigonometrischen Linien.

A.

Die Vergleichungen trigonometrischer Linien mit anderen im Kreise vorkommenden Linien.

§. 13.

Lehrsätze.

I. Der Sinus eines spitzen Winkels oder seines Bogens ist der halben Sehne des doppelten Bogens gleich.

Beweis: (Fig. 4)

Th.) $\sin. x = \frac{1}{2} AD$

D) $AD = 2AE$, folglich ist auch
$ABD = 2x$, also $\frac{1}{2}AD = AE$ und
$\frac{1}{2}ABD = x$. Nun ist für $r = 1$, $AE = \sin. x$,
mithin ist auch $\sin. x = \frac{1}{2}AD$.

Zusätze:

1) Der sin. 30° ist dem halben Radius gleich; denn sin. 30° = $\frac{1}{2}$ Sehne 60°; (Lehrs.) es ist aber aus der Geometrie die Sehne von 60° dem Radius gleich, mithin ist sin. 30° = $\frac{1}{2}$r.

2) Die Sehne eines spitzen Winkels oder seines Bogens ist dem doppelten Sinus des halben Winkels oder Bogens gleich; denn (Fig. 4.) sin. x = $\frac{1}{2}$AD, folglich AD = 2 sin. x (Lehrs.) oder Chord. 2x = 2. sin. x.

3) Es ist demnach Chord. 6° = 2. sin. 3°, Chord. 7° = 2. sin. 3° 30' u. s. w.

4) Der Sinus eines spitzen Peripheriewinkels ist dem Sinus seines dazu gehörigen halben Centriwinkels gleich, wenn man die Schenkeln des Peripheriewinkels mit dem Radius des Centriwinkels abschneidet; denn (Fig. 4.) y = $\frac{1}{2}$ABD = x, sin. x = $\frac{1}{2}$AD = AE (Lehrs.), mithin ist auch sin. y = sin. x = $\frac{1}{2}$ AD = AE.

5) Der Cosinus von 60° ist dem halben Radius gleich; denn 60° = compl. 30°, mithin sin. 30° = cos. 60° $= \frac{r}{2}$ (Zus. 1.)

§. 14.

II. Der Cosinus von 30°, so wie der Sinus von 60° ist dem Produkte aus dem halben Radius mit der Quadratwurzel aus 3 gleich.

Beweis: (Fig. 4.)

Th.) cos. 30° = sin. 60° $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$

D) Ist x = 30°, so ist AE = sin. 30°, BE = cos. 30° und AB = r (§. 5. Zus. 6. u. §. 6. Zus. 7.), folglich BE $= \sqrt{(AB^2 - AE^2)}$ oder cos. 30° $= \sqrt{(r^2 - \sin.^2 30°)} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)}$ (§. 13. Zus. 1.) $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Da nun 30° = compl. 60° ist, so ist cos. 30° = sin. 60° (§. 6.), und endlich cos. 30° = sin. 60° $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Zusätze:

1) Für den Radius 1 ist cos. $30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025\ldots$ $=$ sin. 60° (Lehrs.)

2) Der Sinus und Cosinus von 45° sind einander gleich (§. 6.), und zwar ist sin. $45^\circ =$ cos. $45^\circ = r\sqrt{\frac{1}{2}}$; denn ist Fig. 4 der Winkel $x = 45^\circ$, so ist, weil $AE^2 + BE^2 = AB^2$, sin.$^2\,45^\circ +$ cos.$^2\,45^\circ = r^2$; nun ist sin. $45^2 =$ cos. 45°, mithin 2 sin.$^2\,45^\circ = r^2$ und 2 cos.$^2\,45^\circ = r^2$, woraus sin. $45^\circ =$ cos. $45^\circ = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

3) Für den Radius 1 ist sin. $45^\circ =$ cos. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707106\ldots$

4) Der Sinus und Cosinus von 45° sind der halben Sehne eines Bogens von 90° gleich (§. 13.).

§. 15.

III. Der Sinusversus von 30° oder der Cosinusversus von 60° ist dem Produkte aus dem halben Radius mit der Differenz zwischen 2 und $\sqrt{3}$ gleich.

Beweis: (Fig. 4.)

Th.) sinvers. $30^\circ =$ cosinvers. $60^\circ = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$

D) sinvers. $x = CE = BC - BE = r -$ cos. x. Ist nun $x = 30^\circ$, so ist sinvers. $30^\circ = r -$ cos. $30^\circ = r - \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (§. 14.) $= \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Da endlich $60^\circ =$ compl. 30° ist, so ist sinvers. $30^\circ =$ cosinvers. $60^\circ = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Zusätze:

1) Für den Radius 1 ist sinvers. $30^\circ =$ cosinvers. $60^\circ = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) = 0{,}133975\ldots$

2) Der Sinusversus und Cosinusversus von 45° sind einander gleich (§. 8.), und zwar ist sinvers. $45^\circ =$ cosinvers. $45^\circ = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2})$; denn ist Fig. 4 der

Winkel $x = 45^\circ$, so ist, weil $CE = BC - BE$, sinvers. $45^\circ = r - \cos. 45^\circ = r - r\sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 14. Zus. 2.) $= r(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2})$.

3) Für den Radius 1 ist sinvers. $45^\circ =$ cosinvers. $45^\circ = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) = 0{,}292894\ldots$

§. 16.

IV. Die Tangente und Cotangente von 45° ist dem Radius gleich.

Beweis: (Fig. 5.).

Th.) $tg. 45^\circ = cotg. 45^\circ = r$.

D) Ist $x = 45^\circ$, so ist es auch m, y und n, und $x + y = m + n = 90^\circ$. Folglich $AB = BC = AD = CD$, oder $tg. 45^\circ = r = cotg. 45^\circ = r$.

Zusatz:

Die Tangente und Cotangente von 45° sind einander gleich. (Lehrs.)

§. 17.

V. Die Secante und Cosecante von 45° ist dem Produkte aus dem Radius mit $\sqrt{2}$ gleich.

Beweis: (Fig. 5)

Th.) $sec. 45^\circ = cosec. 45^\circ = r\sqrt{2}$.

D.) Ist $y = compl. x$, und $x = 45^\circ$, so ist auch $y = 45^\circ$, mithin $AC = sec. 45^\circ = cosec. 45^\circ$. Ferners ist, wenn $x = 45^\circ$ ist, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ oder $sec.^2 45^\circ = cosec.^2 45^\circ = tg.^2 45^\circ + cotg.^2 45^\circ = 2r^2$ (§. 16), und endlich $sec. 45^\circ = cosec. 45^\circ = r\sqrt{2}$.

Zusätze:

1) Es ist demnach die Secante von 45° der Cosecante von 45° gleich (Lehrs.).

2) Für den Radius 1 ist $sec. 45^\circ = \sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$

§. 18.

VI. Die trigonometrischen Linien für gleiche Winkel in verschiedenen Kreisen verhalten sich eben so, wie die Radien

dieser Kreise, von welchen die Winkel als Centriwinkel betrachtet werden.

Beweis: (Fig. 6) Bezeichnet man die zum großen Kreise gehörigen Linien mit großen, und die zum kleinen Kreise bestimmten mit kleinen Buchstaben, so ist

Th.) 1) Sin. x : sin. x = R : r,
2) Cos. x : cos. x = R : r,
3) Sinvers. x : sinvers. x = R : r.
4) Cosinvers. x : cosinvers. x = R : r,
5) Tg. x : tg. x = R : r,
6) Cotg. x : cotg. x = R : r,
7) Sec. x : sec. x = R : r,
8) Cosec. x : cosec. x = R : r.

D.) ad 1) Im △ BFG ist FG ‡ DE, also FG : DE = BF : BD oder Sin. x : sin. x = R : r.

ad 2) Im △ BFG ist FG ‡ DE, mithin BG : BE = BF : BD oder Cos. x : cos. x = R : r.

ad 3) Aus BG : BI = BF : BD oder BF : BG = BD : BE ist BF : BF — BG = BD : BD — BE oder BF : BC — BG = BD : BI — BE oder R : Sinvers. x = r : sinvers. x.

ad 4) Auf dieselbe Art erhält man in dem Dreyecke BLK die Proportion R : Cosinvers. x = r : consinvers x.

ad 5) Im △ ABC ist AC ‡ HI, mithin AC : HI = BC : BI oder Tg. x : tg. x = R : r.

ad 6) Im △ BLK ist KL ‡ MN, also KL : MN = BK : BM oder Cotg. x : cotg. x = R : r.

ad 7) Im △ ABC ist AC ‡ HI, folglich AB : BH = BC : BI oder Sec. x : sec. x = R : r.

ad 8) Im △ BLK ist KL ‡ MN, also BL : BN = BK : BM oder Cosec. x : cosec. x = R : r.

Zusätze:

1) Wenn man die trigonometrischen Linien für den Radius R weiß, so sind auch diejenigen für den Radius r bekannt; d. h.

$$\sin.\ x = \frac{r\ \mathrm{Sin.}\ x}{R}$$

$$\cos.\ x = \frac{r.\ \mathrm{Cos.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{sinvers.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Sinvers.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{cosinvers.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Cosinvers.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{tg.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Tg.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{cotg.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Cotg.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{sec.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Sec.}\ x}{R}$$

$$\mathrm{cosec.}\ x = \frac{r.\ \mathrm{Cosec.}\ x}{R}$$

2) Wenn man die trigonometrischen Linien für den Radius 1 weiß, so darf man nur dieselben mit demjenigen Radius multipliziren, für welchen man sie berechnen will; denn ist $R = 1$, so ist sin. x = r. Sin. x, cos. x = r. Cos. x, sinvers. x = r. Sinvers. x, cosinvers. x = r. Cosinvers. x, tg. x = r. Tg. x, cotg. x = r. Cotg. x, sec. x = r. Sec. x und cosec. x = r. Cosec. x.

B.

Analytische Herleitung der Formeln für die trigonometrischen Linien.

a) Die Formeln für einfache Winkel.

§. 19.

Lehrsätze.

I. Der Cosinus eines Winkels ist der Quadratwurzel aus dem Produkte zwischen der Summe und Differenz des Radius und Sinus des Winkels gleich.

Beweis: (Fig. 4)

Th.) $\cos. x = \sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}$.

D.) In dem rechtwinkligen Dreyecke ABE ist $BE = \sqrt{(AB^2 - AE^2)}$, oder $\cos. x = \sqrt{(r^2 - \sin.^2 x)} = \sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}$.

Zusätze:

1) $\cos. 0^\circ = \sqrt{[(r + 0)(r - 0)]} = r$, $\cos. 90^\circ = \sqrt{[(r + r)(r - r)]} = 0$, $\cos. 180^\circ = \sqrt{[(r + 0)(r - 0)]} = r$, $\cos. 270^\circ = \sqrt{[(r - r)(r + r)]} = 0$, und endlich $\cos. 360^\circ = \sqrt{[(r + 0)(r - 0)]} = r$. Daß cos. 180° negativ ist, folgt aus der entgegengesetzten Lage zum sin. 0°. (Man vergleiche hiermit §. 6.)

2) Für den Radius 1 ist $\cos. x = \sqrt{[(1 + \sin. x)(1 - \sin. x)]}$.

3) Aus $\cos. x = \sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}$ folgt $\sin. x = \sqrt{[(r + \cos. x)(r - \cos. x)]}$, und $r = \sqrt{(\sin.^2 x + \cos.^2 x)}$.

§. 20.

II. Der Sinusversus eines Winkels ist der Differenz zwischen dem Radius und dem Cosinus des Winkels gleich.

Beweis: (Fig. 4.)

Th.) $\text{sinvers. } x = r - \cos. x$.

D.) $CE = BC - BE$ oder $\text{sinvers. } x = r - \cos. x$.

Zusätze:

1) Hieraus folgt: $\text{sinvers. } 0^\circ = 0$, $\text{sinvers. } 90^\circ = r$, $\text{sinvers. } 180^\circ = 2r$, $\text{sinvers. } 270^\circ = r$ und $\text{sinvers. } 360^\circ = 0$. (Man vergleiche hiermit §. 7.)

2) Will man den Sinusversus eines Winkels durch den Sinus ausdrücken, so sage man: $\text{sinvers. } x = r - \cos. x = r - \sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}$ (§. 19).

3) Für den Radius 1 ist $\text{sinvers. } x = 1 - \cos. x = 1 - \sqrt{[(1 + \sin. x)(1 - \cos. x)]}$ (§. 19 Zus. 2).

4) Sinvers. 60° und cos. 60° sind einander gleich; denn

$$\text{sinvers. } 60^\circ = r - \frac{r}{2} \text{ (§. 13 Zus. 5)} = \frac{r}{2} = \cos. 60^\circ.$$

5) Der Sinusversus und der Sinus von 60° verhalten sich zu einander wie 1 zu $\sqrt{3}$; denn sinvers. 60° : sin. 60° $= \frac{r}{2} : \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (Zus. 4 und §. 14) $= 1 : \sqrt{3}$.

§. 21.

III. Der Cosinusversus eines Winkels ist der Differenz aus dem Radius und dem Sinus des Winkels gleich.

Beweis: (Fig. 6.)

Th.) cosinvers. x = r — sin. x.

D.) MO = BM — BO = BM — FG oder cosinvers. x = r — sin. x.

Zusätze:

1) Betrachtet man den Cosinusversus in den verschiedenen Quadranten, so folgt hieraus dasselbe, wie §. 8.

2) Für den Radius 1 ist cosinvers. x = 1 — sin. x.

§. 22.

IV. Die Tangente eines Winkels erhält man, wenn man das Produkt aus dem Radius und dem Sinus durch den Cosinus dividirt.

Beweis: (Fig. 6.)

Th.) $\text{tg. } x = \frac{\text{r. sin. } x}{\text{cos. } x}$

D.) In dem △ ABC ist AC # FG, mithin AC : BC = FG : BG oder tg. x : r = sin. x : cos. x, woraus tg. x $= \frac{\text{r. sin. } x}{\text{cos. } x}$ folgt.

Zusätze:

1) Hieraus folgt: tg. 0° $= \frac{r \times 0}{r} = 0$, tg. 90° $= \frac{r \times r}{0} = \infty$, und tg. 180° $= \frac{r \times 0}{-r} = 0$, tg. 270° $= \frac{r \times - r}{0} = -\infty$, und tg. 360° $= \frac{r \times 0}{r} = 0$. (Man vergleiche hiermit §. 9.)

2) Will man die Tangente durch den Sinus allein ausdrücken, so erhält man $\text{tg. } x = \frac{r \sin. x}{\sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}}$ (§. 19).

3) Für $r = 1$ ist $\text{tg. } x = \frac{\sin. x}{\cos. x} = \frac{\sin. x}{\sqrt{[(1 + \sin. x)(1 - \sin. x)]}}$.

4) Für 60° ist die Tangente noch einmal so groß als der Sinus; denn $\text{tg.} 60° = \frac{r \times \frac{r}{2} \sqrt{3}}{\frac{r}{2}} = r \sqrt{3}$, und $\sin. 60° = \frac{r}{2} \sqrt{3}$ (§. 13 Zus. 5 und §. 14).

5) Der Sinusversus oder der Cosinus von 60° (§. 20 Zus. 4) steht mit der Tangente von 60° in dem Verhältnisse wie $\frac{1}{2} : \sqrt{3}$; denn sinvers. 60° oder $\cos. 60° : \text{tg. } 60° = \frac{r}{2} : r \sqrt{3} = \frac{1}{2} : \sqrt{3}$ (§. 20 Zus. 4 und Zus. 4 in diesem §.).

§. 23.

V. Die Cotangente eines Winkels erhält man, wenn man das Produkt aus dem Radius mit dem Cosinus durch den Sinus dividirt.

Beweis: (Fig. 6.)

Th.) $\text{cotg. } x = \frac{r. \cos. x}{\sin. x}$.

D.) $m = x$, $BKL = FGB = R$, mithin $\triangle BKL \sim \triangle FGB$, also $KL : BK = BG : FG$ oder $\text{cotg. } x : r = \cos. x : \sin. x$, woraus $\text{cotg. } x = \frac{r. \cos. x}{\sin. x}$.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Cotangente in den verschiedenen Quadranten, so folgt hieraus dasselbe, wie §. 10.

2) Die Cotangente durch den Sinus allein ausgedrückt, gibt: $\text{cotg.} x = \frac{r. \sqrt{[(r + \sin. x)(r - \sin. x)]}}{\sin. x}$ (§. 19).

3) Für $r = 1$ ist $\text{cotg.}\,x = \frac{\cos.x}{\sin.x} = \frac{\sqrt{[(1+\sin.x)(1-\sin.x)]}}{\sin.x}$.

4) Man erhält auch die Cotangente eines Winkels, wenn man das Quadrat des Radius durch die Tangente dividirt; d. h. $\text{cotg.}\,x = \frac{r^2}{\text{tg.}\,x}$; denn $\triangle$ KLB ∞ $\triangle$ ABC, folglich KL : BK = BC : AC, oder $\text{cotg.}\,x : r = r : \text{tg.}\,x$, woraus $\text{cotg.}\,x = \frac{r^2}{\text{tg.}\,x}$; und für $r = 1$ ist $\text{cotg.}\,x = \frac{1}{\text{tg.}\,x}$, so wie umgekehrt $\text{tg.}\,x = \frac{1}{\text{cotg.}\,x}$.

5) Bei einem Winkel von 60° ist der Sinus ein und ein halbes Mal so groß als die Cotangente; denn für 60° ist $\text{tg.}\,60^\circ = r\sqrt{3}$ (§. 22 Zus. 4), folglich $\text{cotg.}\,60^\circ = \frac{r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$; $\sin.\,60^\circ = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (§. 14); mithin $\text{cotg.}\,60^\circ : \sin.\,60^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}} : \frac{r\sqrt{3}}{2} = r : \frac{3r}{2} = 1 : 1\frac{1}{2}$.

§. 24.

VI. Die Secante eines Winkels erhält man, wenn man das Quadrat des Radius durch den Cosinus dividirt.

Beweis: (Fig. 6.)

Th.) $\sec.\,x = \frac{r^2}{\cos.\,x}$.

D.) Im $\triangle$ ABC ist AC $\#$ FG, also AB : BC = BF : FG, oder $\sec.\,x : r = r : \cos.\,x$, woraus $\sec.\,x = \frac{r^2}{\cos.\,x}$.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Secante in den verschiedenen Quadranten, so folgt hieraus dasselbe, wie §. 11.

2) Die Secante durch den Sinus allein ausgedrückt, gibt:

$$\sec.\,x = \frac{r^2}{\sqrt{[(r+\sin.\,x)(r-\sin.\,x)]}} \text{ (§. 19).}$$

3) Für $r = 1$ wird $\sec. x = \frac{1}{\cos. x} = \frac{1}{\sqrt{[(1 + \sin. x)(1 - \sin. x)]}}$.

4) Man erhält auch die Secante eines Winkels, wenn man aus der Summe der Quadrate des Radius und der Tangende die Quadratwurzel zieht; d. h. $\sec. x = \sqrt{(r^2 + tg.^2 x)}$; denn $AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2)}$ oder $\sec. x = \sqrt{(r^2 + tg.^2 x)}$.

5) Die Secante von 60° ist dem Diameter gleich; denn $\sec. 60^0 = \frac{r^2}{\cos. 60^0}$ (Lehrs.) $= r^2 : \frac{r}{2}$ (§. 13 Z. 5) $= 2r$.

6) Bei einem Winkel von 60° ist die Secante viermal so groß als der Cosinus oder Sinusversus (§. 20 Zus. 4); denn $\sec. 60^0 : \cos. 60^0$ oder $\text{sinvers}. 60^0 = 2r : \frac{r}{2}$ (Zus. 5 und §. 20 Zus. 4) $= 4r : r = 4 : 1$.

7) Bei 45° ist die Secante dem Sinus und Cosinus zusammengenommen gleich; denn $\sec. 45^0 = r^2 : r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ (§. 14 Zus. 2) $= r^2 : \frac{r\sqrt{2}}{2} = 2r^2 : r\sqrt{2} = r\sqrt{2}$, und $\sin. 45^0 + \cos. 45^0 = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} + r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ (§. 14 Zus. 2) $= 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r\sqrt{2}$.

8) Da nun $\cos. 45^0 = \sin. 45^0$ (§. 14 Zus. 2), so ist $\sec. 45^0 = 2 \cos. 45^0 = 2 \sin. 45^0 = r\sqrt{2}$, nämlich dem doppelten Sinus oder Cosinus gleich.

§. 25.

VII. Die Cosecante eines Winkels ist gleich dem Quadrate des Radius, dividirt durch den Sinus.

Beweis: (Fig. 6.)

Th.) $\text{cosec}. x = \frac{r^2}{\sin. x}$.

D.) $\triangle BKL \sim \triangle BFG$, mithin $BL : BK = BF : FG$, oder $\text{cosec}. x : r = r : \sin. x$, woraus $\text{cosec}. x = \frac{r^2}{\sin. x}$.

Zusätze:

1) Betrachtet man die Cosecante in den verschiedenen Quadranten, so findet man hieraus dasselbe wie §. 12.
2) Man erhält auch die Cosecante eines Winkels, wenn man aus der Summe der Quadrate des Radius und der Cotangente die Quadratwurzel zieht; denn $BL = \sqrt{(BK^2 + KL^2)}$, oder $\text{cosec. } x = \sqrt{(r^2 + \text{cotg.}^2 x)}$.
3) Für den Radius 1 ist demnach $\text{cosec. } x = \frac{1}{\text{sin. } x} = \sqrt{(1 + \text{cotg.}^2 x)}$.
4) Die Cosecante von 60° ist gleich $r^2 : \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (Lehrs. und §. 14) $= \frac{2r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.
5) Es ist demnach die Cosecante von 60° noch einmal so groß, als die dazu gehörige Cotangente (§. 23 Zus. 5).
6) Der Sinus und die Cosecante von 60° verhalten sich zu einander wie 3 zu 4; denn $\text{sin. } 60^\circ : \text{cosec.} : 60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2} : \frac{2r}{\sqrt{3}}$ (Zus. 4 und §. 14) $= r\sqrt{3} : \frac{4r}{\sqrt{3}} = 3r : 4r = 3 : 4$.

b) Die Formeln für zusammengesetzte Winkel.

§. 26.

Lehrsätze.

I. Man erhält den Sinus von der Summe zweyer Winkel, wenn man die Produkte aus dem Sinus des einen und dem Cosinus des andern Winkels addirt, und diese Summe durch den Radius dividirt.

Beweis: (Fig. 7) Wenn man die beiden Winkel mit α und β bezeichnet, so ist

$$\text{Th.)} \ \text{sin. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \, . \, \text{cos. } \beta + \text{cos. } \alpha \, . \, \text{sin. } \beta}{r}.$$

D.) $AG = \sin. \alpha$, $BG = \cos. \alpha$, $DF = \sin. \beta$, $BF = \cos. \beta$, $DE = \sin. DBC = \sin. (\alpha + \beta)$, und $BE = \cos. DBC = \cos. (\alpha + \beta)$.

Man fälle FH auf BC und FI auf DE senkrecht, so ist $\sin. (\alpha + \beta) = DE = EI + DI = FH + DI$ (weil $EI = FH$). Da nun $\triangle ABG \backsim \triangle FBH$, so ist

$AB : AG = FB : FH$ oder

$r : \sin. \alpha = \cos. \beta : FH$, woraus

$$FH = \frac{\sin. \alpha \cdot \cos. \beta}{r}.$$

Ferners ist $AGB = R = DIF$, und

$IDF = IFK = \alpha$, mithin

$\triangle AGB \backsim \triangle DIF$, folglich

$AB : BG = DF : DI$, oder

$r : \cos. \alpha = \sin. \beta : DI$, woraus

$$DI = \frac{\cos. \alpha \cdot \sin. \beta}{r}.$$

Also ist $\sin. (\alpha + \beta) = FH + DI =$

$$\frac{\sin. \alpha \cdot \cos. \beta + \cos. \alpha \cdot \sin. \beta}{r}.$$

Zusätze:

1) Für den Radius 1 ist demnach
$\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha \cdot \cos. \beta + \cos. \alpha \cdot \sin. \beta$.

2) Setzt man $\alpha = \beta$, so bekömmt man

$$\sin. 2\alpha = \frac{2 \sin. \alpha \cdot \cos. \alpha}{r} \text{ (Lehrs.).}$$

3) $$\tfrac{1}{2} \sin. 2\alpha = \frac{\sin. \alpha \cdot \cos. \alpha}{r} \text{ (Zus. 2).}$$

4) Auch aus dem Sinus oder Cosinus des halben Winkels läßt sich der Sinus des ganzen Winkels bestimmen; denn man darf nur $\alpha = \frac{1}{2} \gamma$ setzen, so erhält man aus Zusatz 2 entweder

$$\sin.\gamma = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\gamma \times \cos.\frac{1}{2}\gamma}{r}$$

$$= \frac{2\sin.\frac{1}{2}\gamma\sqrt{(r^2 - \sin.^2\frac{1}{2}\gamma)}}{r} \text{ oder}$$

$$\sin.\gamma = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\gamma \times \cos.\frac{1}{2}\gamma}{r}$$

$$= \frac{2\cos.\frac{1}{2}\gamma\sqrt{(r^2 - \cos.^2\frac{1}{2}\gamma)}}{r}.$$

5) $\text{Sin.}(\alpha - \beta) = \frac{\sin.\alpha . \cos.\beta - \cos.\alpha . \sin.\beta}{r}$; denn trägt man ABM $= \beta$ auf α auf, so ist $\alpha - \beta =$ MBC und $\sin.(\alpha - \beta) = \sin.$ MBC $=$ MN; fällt man nun LM senkrecht auf DE, so ist LM # IF, und weil DF $=$ FM ist, auch DI $=$ IL. MN $=$ EI $-$ IL $=$ FH $-$ DI oder $\sin.(\alpha - \beta) = \frac{\sin.\alpha . \cos.\beta}{r} - \frac{\cos.\alpha . \sin.\beta}{r} = \frac{\sin.\alpha . \cos.\beta - \cos.\alpha . \sin.\beta}{r}$.

6) $\sin.(\alpha + \beta) + \sin.(\alpha - \beta) = \frac{2.\sin.\alpha . \cos.\beta}{r}$, und $\sin.(\alpha + \beta) - \sin.(\alpha - \beta) = \frac{2.\cos.\alpha . \sin.\beta}{r}$, welches aus dem Lehrsatze und Zusatze 5 folgt.

§. 27.

II. Man erhält den Cosinus von der Summe zweyer Winkel, wenn man das Produkt der Sinus von jenem der Cosinus abzieht, und diese Differenz durch den Radius dividirt.

Beweis: (Fig. 7.)

Th.) $\cos.(\alpha + \beta) = \frac{\cos.\alpha . \cos.\beta - \sin.\alpha . \sin.\beta}{r}$.

D.) $\cos.(\alpha + \beta) =$ BE $=$ BH $-$ EH $=$ BH $-$ FI.

Nun ist △ ABG ∾ △ FBH, folglich

AB : BG $=$ FB : BH oder

$r : \cos.\alpha = \cos.\beta : BH$, woraus

$$BH = \frac{\cos.\alpha \,.\, \cos.\beta}{r}.$$

Ferners ist $AGB = R = DIF$, und
$IDF = IFK = \alpha$, mithin
$\triangle AGB \sim \triangle DIF$, folglich
$AB : AG = AD : FI$ oder
$r : \sin.\alpha = \sin.\beta : FI$, woraus

$$FI = \frac{\sin.\alpha \,.\, \sin.\beta}{r}.$$

Also ist $\cos.(\alpha + \beta) = BH - FI =$

$$\frac{\cos.\alpha \,.\, \cos.\beta - \sin.\alpha \,.\, \sin.\beta}{r}.$$

Zusätze:

1) Für $r = 1$ ist also $\cos.(\alpha+\beta) = \cos.\alpha \,.\, \cos.\beta - \sin.\alpha \,.\, \sin.\beta$.

2) Setzt man $\alpha = \beta$, so erhält man

$$\cos.2\alpha = \frac{\cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha}{r}$$ (Lehrs.).

3) Setzt man $\beta = 2\alpha$, so bekömmt man

$$\cos.3\alpha = \frac{\cos.\alpha \,.\, \cos.2\alpha - \sin.\alpha \,.\, \sin.2\alpha}{r}$$ (Lehrs.)

$= \left[\frac{\cos.\alpha(\cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha)}{r} - \frac{2\sin.^2\alpha \,.\, \cos.\alpha}{r}\right] : r$ (Zus. 2 und §. 26 Zus. 2) $= \frac{\cos.^3\alpha - 3\sin.^2\alpha \,.\, \cos.\alpha}{r^2}$.

Und $\sin.3\alpha = \frac{\sin.\alpha \,.\, \cos.2\alpha + \cos.\alpha \,.\, \sin.2\alpha}{r}$ (§. 26)

$= \left[\frac{\sin.\alpha(\cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha)}{r} + \frac{2\cos.^2\alpha \,.\, \sin.\alpha}{r}\right] : r$ (Zus. 2 und §. 26 Zus. 2) $= \frac{3\cos.^2\alpha \,.\, \sin.\alpha - \sin.^3\alpha}{r^2}$. Setzt man weiters $\beta = 3\alpha$, $\beta = 4\alpha$ u. s. w., so erhält man ebenso $\sin.4\alpha$, $\sin.5\alpha$, $\cos.4\alpha$, $\cos.5\alpha$ u. s. w.

4) $\cos.2\alpha = \frac{\cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha}{r}$ (Zus. 2) $= \frac{r^2 - \sin.^2\alpha - \sin.^2\alpha}{r} =$
$\frac{r^2 - 2\sin.^2\alpha}{r}$ (§. 19), woraus $\sin.\alpha = \sqrt{\left(\frac{r(r - \cos.2\alpha)}{2}\right)}$.

5) $\cos.\ 2\alpha = \frac{\cos.^2\ \alpha - \sin.^2\ \alpha}{r}$ (Zus. 2) $=$
$\frac{\cos.^2\ \alpha - r^2 + \cos.^2\ \alpha}{2} = \frac{2\cos.^2\ \alpha - r^2}{2}$ (§. 19 Zus. 3); woraus $\cos.\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{r\ (r + \cos.\ 2\alpha)}{2}\right)}$.

6) Setzt man in den Gleichungen Zusatz 3 und 4 den Winkel $\alpha = \frac{1}{2}\ \gamma$, so bekömmt man $\sin.\ \frac{1}{2}\ \gamma = \sqrt{\left(\frac{r\ (r - \cos.\ \gamma)}{2}\right)}$ und $\cos.\ \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{r\ (r + \cos.\ \gamma)}{2}\right)}$.

7) Man findet auch den Cosinus eines Winkels aus dem Sinus oder Cosinus des halben Winkels; denn setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\ \gamma$, so ist aus Zusatz 3

$$\cos.\ \gamma = \frac{r^2 - 2\sin.^2\ \frac{1}{2}\ \gamma}{r}$$

und aus Zusatz 4

$$\cos.\ \gamma = \frac{2\cos.^2\ \frac{1}{2}\ \gamma - r^2}{r}.$$

8) $\cos.\ (\alpha - \beta) = \frac{\cos.\alpha\ .\ \cos.\ \beta + \sin.\ \alpha\ .\ \sin.\ \beta}{r}$; denn trägt man ABM $= \beta$ auf α auf, so ist $\alpha - \beta =$ MBC und $\cos.\ (\alpha - \beta) = \cos.$ MBC $=$ BN; nun ist im $\triangle$ DLM die Linie FO $\#$ DL, und da DF $=$ FM, so ist auch MO $=$ OL $=$ FI; ferners ist BN $=$ BH $+$ HN $=$ BH $+$ MO $=$ BH $+$ FI, woraus $\cos.\ (\alpha - \beta) = \frac{\cos.\ \alpha\ .\ \cos.\ \beta + \sin.\ \alpha\ .\ \sin.\ \beta}{r}$ folgt.

9) Aus dem Lehrsatze und Zusatze 7 folgt
$\cos.\ (\alpha + \beta) + \cos.\ (\alpha - \beta) = \frac{2\cos.\ \alpha\ .\ \cos.\ \beta}{r}$ und

$$\cos.(\alpha+\beta)-\cos.(\alpha-\beta)=-\frac{2\sin.\alpha\,.\,\sin.\beta}{r}\text{ oder}$$

$$\cos.(\alpha-\beta)-\cos.(\alpha+\beta)=\frac{2\sin.\alpha\,.\,\sin.\beta}{r}.$$

10) Da für den Radius r Chord. $\alpha = 2r.\sin.\frac{1}{2}\alpha$ ist (§. 13 Zusatz 2), so ist $\sin.\frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{chord.}\,\alpha}{2r} = \frac{1}{2r}\text{chord.}\alpha$, und hieraus $\sin.\alpha = \dfrac{2.\frac{1}{2r}\text{chord.}\alpha\sqrt{(r^2-\frac{1}{4r^2}\text{chord.}^2\alpha)}}{r}$

$$(\text{§. 26 Zus. 4}) = \frac{\frac{1}{r}\text{chord.}\alpha\sqrt{\frac{(4r^4-\text{chord.}^2\alpha)}{4r^2}}}{r}$$

$$=\frac{\text{chord.}\alpha}{2r^3}\sqrt{[(2r^2+\text{chord.}\alpha)(2r^2-\text{chord.}\alpha)]}.$$ Eben so folgt durch dieselbe Substitution aus Zusatz 6, daß

$$\cos.\alpha=\frac{r^2-2\times\frac{1}{4r^2}\text{chord.}^2\alpha}{r}=\frac{2r^4-\text{chord.}^2\alpha}{2r^3}.$$

Man kann demnach leicht aus der Sehne eines Winkels den Sinus und Cosinus bestimmen.

§. 28.

III. Man findet durch folgende Gleichung die Tangente von der Summe zweyer Winkel α und β:

$$\text{tg.}(\alpha+\beta)=\frac{(\text{tg.}\alpha+\text{tg.}\beta)\,r^2}{r^2-\text{tg.}\alpha\,.\,\text{tg.}\beta}.$$

Beweis:

Th.) $\text{tg.}(\alpha+\beta)=\dfrac{(\text{tg.}\alpha+\text{tg.}\beta)\,r^2}{r^2-\text{tg.}\alpha\,.\,\text{tg.}\beta}.$

D.) $\text{tg.}(\alpha+\beta)=\dfrac{r\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.(\alpha+\beta)}$ (§. 22)

$$=\frac{r(\sin.\alpha\,.\cos.\beta+\cos.\alpha\,.\sin.\beta):r}{(\cos.\alpha\,.\cos.\beta-\sin.\alpha\,.\sin.\beta):r}$$

(§. 26 und 27). Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos.\alpha.\cos.\beta$, so ist

$$\mathrm{tg}.(\alpha+\beta)=\frac{r(\sin.\alpha.\cos.\beta+\cos.\alpha.\sin.\beta):(\cos.\alpha.\cos.\beta)}{(\cos.\alpha.\cos.\beta-\sin.\alpha.\sin.\beta):(\cos.\alpha.\cos.\beta)}$$

$$=\left[\frac{r(\sin.\alpha.\cos.\beta+\cos.\alpha.\sin.\beta)}{\cos.\alpha.\cos.\beta}\right]:\left(1-\frac{\sin.\alpha.\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta}\right)$$

$$=\frac{r[(\sin.\alpha):(\cos.\alpha)+(\sin.\beta):(\cos.\beta)]}{1-[(\sin.\alpha):(\cos.\alpha)][(\sin.\beta):(\cos.\beta)]}=$$

$$=\frac{[r(\sin.\alpha):(\cos.\alpha)]+[r(\sin.\beta):(\cos.\beta)]\,r^2}{r^2-[r(\sin.\alpha):(\cos.\alpha)]\,[r(\sin.\beta):(\cos.\beta)]}$$

$$=\frac{(\mathrm{tg}.\alpha+\mathrm{tg}.\beta)\,r^2}{r^2-\mathrm{tg}.\alpha.\mathrm{tg}.\beta}\ \text{(§. 22).}$$

Zusätze:

1) Für den Radius 1 ist $\mathrm{tg}.(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}.\alpha+\mathrm{tg}.\beta}{1-\mathrm{tg}.\alpha.\mathrm{tg}.\beta}$.

2) $$\mathrm{tg}.(\alpha-\beta)=\frac{r.\sin.(\alpha-\beta)}{\cos.(\alpha-\beta)}\ \text{(§. 22)}$$

$$=\frac{r(\sin.\alpha.\cos.\beta-\cos.\alpha.\sin.\beta):r}{(\cos.\alpha.\cos.\beta+\sin.\alpha.\sin.\beta):r}$$

(§, 26 Zus. 5 und §. 27 Zus. 7). Verfährt man nun ebenso, wie im Beweise des Lehrsatzes, so erhält man

$$\mathrm{tg}.(\alpha-\beta)=\frac{(\mathrm{tg}.\alpha-\mathrm{tg}.\beta)\,r^2}{r^2+\mathrm{tg}.\alpha.\mathrm{tg}.\beta},\ \text{und für } r=1$$

$$=\frac{\mathrm{tg}.\alpha-\mathrm{tg}.\beta}{1+\mathrm{tg}.\alpha.\mathrm{tg}.\beta}.$$

3) Setzt man in der Formel des Lehrsatzes $\alpha=\beta$, so ist

$$\mathrm{tg}.2\alpha=\frac{2r^2.\mathrm{tg}.\alpha}{r^2-\mathrm{tg}.^2\alpha}=\frac{2r^2.\mathrm{tg}.\alpha}{(r+\mathrm{tg}.\alpha)(r-\mathrm{tg}\,\alpha)}.$$

4) Aus Zusatz 3 folgt $\frac{1}{2}\mathrm{tg}.2\alpha=\frac{r^2\,\mathrm{tg}.\alpha}{r^2-\mathrm{tg}.^2\alpha}$.

5) Setzt man $\alpha=\frac{1}{2}\gamma$, so ist aus Zusatz 3

$$\mathrm{tg}.\gamma=\frac{2r^2.\mathrm{tg}.\frac{1}{2}\gamma}{r^2-\mathrm{tg}.^2\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2r^2.\mathrm{tg}.\frac{1}{2}\gamma}{(r+\mathrm{tg}.\frac{1}{2}\gamma)(r-\mathrm{tg}.\frac{1}{2}\gamma)}.$$

6) Will man tg. $(\alpha + \beta)$ durch den Sinus und Cosinus ausdrücken, so erhält man

$$\text{tg.}\ (\alpha + \beta = \frac{r\ \text{sin.}\ (\alpha + \beta)}{\text{cos.}\ (\alpha + \beta)}\ (\text{§. } 22)$$

$$= \frac{r\,(\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta + \text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta)}{\text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta - \text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta}$$ (§. 26 und 27.).

7) Eben so ist auch $\text{tg.}\ (\alpha - \beta) = \frac{r\ \text{sin.}\ (\alpha - \beta)}{\text{cos.}\ (\alpha - \beta)}$ (§. 22)

$$= \frac{r\ (\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta - \text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta)}{\text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta + \text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta}$$ (§. 26 Zus. 5 und §. 27 Zus. 7).

§. 29.

IV. Durch folgende Gleichung erhält man die Cotangente von der Summe zweyer Winkel α und β:

$$\text{cotg.}\ (\alpha + \beta) = \frac{r^2 - \text{tg.}\ \alpha\ .\ \text{tg.}\ \beta}{\text{tg.}\ \alpha + \text{tg.}\ \beta}.$$

Beweis:

Th.) $\text{cotg.}\ (\alpha + \beta) = \frac{r^2 - \text{tg.}\ \alpha\ .\ \text{tg.}\ \beta}{\text{tg.}\ \alpha + \text{tg.}\ \beta}$.

D.) $\text{cotg.}\ (\alpha + \beta = \frac{r.\ \text{cos.}\ (\alpha + \beta)}{\text{sin.}\ (\alpha + \beta)}$ (§. 23)

$$= \frac{r\ (\text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta - \text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta)\ :\ r}{(\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta + \text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta)\ :\ r}$$ (§. 26 und 27).

Dividirt man Zähler und Nenner durch cos. α. cos. β, so ist

$$\text{cotg.}\ (\alpha + \beta) = \frac{r\ (\text{cos.}\ \alpha.\ \text{cos.}\ \beta - \text{sin.}\ \alpha.\ \text{sin.}\ \beta)}{\text{cos.}\ \alpha.\ \text{cos.}\ \beta} : \frac{(\text{sin.}\ \alpha.\ \text{cos.}\ \beta + \text{cos.}\ \alpha.\ \text{sin.}\ \beta)}{\text{cos.}\ \alpha.\ \text{cos.}\ \beta} =$$

$$= \frac{r\ [1 - [(\text{sin.}\ \alpha)\ :\ (\text{cos.}\ \alpha)]\ [(\text{sin.}\ \beta) : (\text{cos.}\ \beta)]}{(\text{sin.}\ \alpha)\ :\ (\text{cos.}\ \alpha) + (\text{sin.}\ \beta)\ :\ (\text{cos.}\ \beta)} =$$

$$= \frac{r^2 - [r\ (\text{sin.}\ \alpha) : (\text{cos.}\ \alpha)]\ [r\ (\text{sin.}\ \beta)\ :\ (\text{cos.}\ \beta)]}{r\ (\text{sin.}\ \alpha)\ :\ (\text{cos.}\ \alpha) + r\ (\text{sin.}\ \beta)\ :\ (\text{cos.}\ \beta)} =$$

$$= \frac{r^2 - \text{tg.}\ \alpha\ .\ \text{tg.}\ \beta}{\text{tg.}\ \alpha + \text{tg.}\ \beta}$$ (§. 23).

Zusätze:

1) $\text{cotg.}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{r\,\cos.\,(\alpha - \beta)}{\sin.\,(\alpha - \beta)}$ (§. 23)

$= \dfrac{r\,(\cos.\,\alpha\,.\,\cos.\,\beta + \sin.\,\alpha\,.\,\sin.\,\beta) : r}{(\sin.\,\alpha\,.\,\cos.\,\beta - \cos.\,\alpha\,.\,\sin.\,\beta) : r}$

(§. 26 Zus. 5 und §. 27 Zus. 7). Fährt man auf eben dieselbe Art, wie im Beweise des Lehrsatzes, weiter, so erhält man $\text{cotg.}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{r^2 + \text{tg.}\,\alpha\,.\,\text{tg.}\,\beta}{\text{tg.}\,\alpha - \text{tg.}\,\beta}$.

2) Setzt man r = 1, so bekömmt man

$\text{cotg.}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{1 - \text{tg.}\,\alpha\,.\,\text{tg.}\,\beta}{\text{tg.}\,\alpha + \text{tg.}\,\beta}$ und

$\text{cotg.}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{1 + \text{tg.}\,\alpha\,.\,\text{tg.}\,\beta}{\text{tg.}\,\alpha - \text{tg.}\,\beta}$.

3) Um die Cotangente von der Summe zweyer Winkel durch die Cotangenten der einzelnen Winkel zu erhalten, sage man:

$\text{cotg.}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{r^2 - \text{tg.}\,\alpha\,.\,\text{tg.}\,\beta}{\text{tg.}\,\alpha + \text{tg.}\,\beta}$ (Lehrs.)

$= \left(r^2 - \dfrac{r^2}{\text{cotg.}\,\alpha}\,.\,\dfrac{r^2}{\text{cotg.}\,\beta}\right) : \left(\dfrac{r^2}{\text{cotg.}\,\alpha} + \dfrac{r^2}{\text{cotg.}\,\beta}\right)$

(§. 23 Zus. 4)

$= \left[\dfrac{r^2\,\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta - r^4}{\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta}\right] : \left[\dfrac{r^2\,\text{cotg.}\,\beta + r^2\,\text{cotg.}\,\alpha}{\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta}\right]$

$= \dfrac{r^2\,(\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta - r^2)}{r^2\,(\text{cotg.}\,\beta + \text{cotg.}\,\alpha)} = \dfrac{\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta - r^2}{\text{cotg.}\,\alpha + \text{cotg.}\,\beta}$, und

für r = 1, $\text{cotg.}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{cotg.}\,\alpha\,.\,\text{cotg.}\,\beta - 1}{\text{cotg.}\,\alpha + \text{cotg.}\,\beta}$.

4) Auf dieselbe Art erhält man auch

$\text{cotg.}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{cotg.}\,\beta\,.\,\text{cotg.}\,\alpha + r^2}{\text{cotg.}\,\beta - \text{cotg.}\,\alpha}$, und für r = 1,

$\text{cotg.}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{cotg.}\,\beta\,.\,\text{cotg.}\,\alpha + 1}{\text{cotg.}\,\beta - \text{cotg.}\,\alpha}$.

4) Setzt man in der Formel des Lehrsatzes $\alpha = \beta$, so bekömmt man

$$\text{cotg.}\, 2\alpha = \frac{r^2 - \text{tg.}^2\, \alpha}{2\, \text{tg.}\, \alpha},$$ oder aus Zusatz 3,

$$\text{cotg.}\, 2\alpha = \frac{\text{cotg.}^2\, \alpha - r^2}{2\, \text{cotg.}\, \alpha}.$$

5) $\frac{1}{2}\, \text{cotg.}\, 2\alpha = \frac{r^2 - \text{tg.}^2\, \alpha}{4\, \text{tg.}\, \alpha} = \frac{\text{cotg.}^2\, \alpha - r^2}{4\, \text{cotg.}\, \alpha}$ (Zus. 4).

6) Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, so ist aus Zusatz 4

$$\text{cotg.}\, \gamma = \frac{\text{cotg.}^2\, \frac{1}{2}\gamma - r^2}{2\, \text{cotg.}\, \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r^2 - \text{tg.}^2\, \frac{1}{2}\gamma}{2\, \text{tg.}\, \frac{1}{2}\gamma}.$$

7) Durch den Sinus und Cosinus ausgedrückt erhält man

$$\text{cotg.}\, (\alpha + \beta) = \frac{r.\, \cos.\, (\alpha + \beta)}{\sin.\, (\alpha + \beta)}$$ (§. 23)

$$= \frac{r\, (\cos.\, \alpha\, .\, \cos.\, \beta - \sin.\, \alpha\, .\, \sin.\, \beta)}{\sin.\, \alpha\, .\, \cos.\, \beta + \cos.\, \alpha\, .\, \sin.\, \beta}$$ (§. 26 und 27) und

$$\text{cotg.}\, (\alpha - \beta) = \frac{r.\, \cos.\, (\alpha - \beta)}{\sin.\, (\alpha - \beta}$$ (§. 23)

$$= \frac{r\, (\cos.\, \alpha\, .\, \cos.\, \beta + \sin.\, \alpha\, .\, \sin.\, \beta)}{\sin.\, \alpha\, .\, \cos.\, \beta - \cos.\, \alpha\, .\, \sin.\, \beta}$$ (§. 26 Zus. 5 und §. 27 Zus. 7).

§. 30.

V. Durch folgende Gleichung findet man die Secante von der Summe zweyer Winkel α und β:

$$\sec.\, (\alpha + \beta) = \frac{r.\, \sec.\, \alpha\, .\, \sec.\, \beta}{r^2 - \sqrt{(\sec.^2\, \alpha - r^2)}\sqrt{(\sec.^2\, \beta - r^2)}}.$$

Beweis:

Th.) $\sec.\, (\alpha + \beta) = \frac{r.\, \sec.\, \alpha\, .\, \sec.\, \beta}{r^2 - \sqrt{(\sec.^2\, \alpha - r^2)}\sqrt{(\sec.^2\, \beta - r^2)}}.$

D.) $\sec.(\alpha + \beta) = \frac{r^2}{\sec.(\alpha + \beta)} = \frac{r^2}{(\cos.\alpha.\cos.\beta - \sin.\alpha.\sin.\beta) : r}$

(§. 24 und 27). Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos.\, \alpha.\, \cos.\, \beta$; so bekömmt man

$$\sec.(\alpha + \beta) = \left[\frac{r^2}{\cos.\alpha.\cos.\beta}\right] : \left[\frac{1 - (\sin.\alpha.\sin.\beta) : (\cos.\alpha.\cos.\beta)}{r}\right]$$

$$= \left\{\frac{r^4}{\cos.\alpha\,.\cos.\beta}\right\} : \left\{\frac{r^2 - \frac{r.\sin.\alpha}{\cos.\alpha}\,.\,\frac{r.\sin.\beta}{\cos.\beta}}{r}\right\} =$$

$$= \left[\frac{r^2}{\cos.\alpha}\,.\,\frac{r^2}{\cos.\beta}\right] : \left[\frac{r^2 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta}{r}\right] =$$

$$= (\sec.\alpha\,.\sec.\beta) : \left(\frac{r^2 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta}{r}\right) =$$

$= \frac{r.\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{r^2 - tg.\alpha\,.\,tg.\beta}$, woraus endlich nach §. 24 Zus. 4

$$\sec.(\alpha + \beta) = \frac{r.\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{r^2 - \sqrt{(\sec.^2\alpha\,. - r^2)}\,\sqrt{(\sec.^2\beta - r^2)}}.$$

Zusätze:

1) $\sec.(\alpha - \beta) = \frac{r^2}{\cos.(\alpha - \beta)} = \frac{r^2}{(\cos.\alpha.\cos.\beta + \sin.\alpha.\sin.\beta):r}$ (§. 24 und 27 Zus. 7). Dividirt man Zähler und Nenner mit $\cos.\alpha\,.\cos.\beta$, und fährt dann wie im Beweise des Lehrsatzes weiter, so bekömmt man

$$\sec.(\alpha - \beta) = \frac{r.\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{r^2 + tg.\alpha\,.\,tg.\beta} =$$

$$= \frac{r.\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{r^2 + \sqrt{(\sec.^2\alpha - r^2)}\,\sqrt{(\sec.^2\beta - r^2)}}.$$

2) Für $r = 1$ ist

$$\sec.(\alpha + \beta) = \frac{\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{1 - \sqrt{(\sec.^2\alpha - 1)}\,\sqrt{(\sec.^2\beta - 1)}},$$

und $\sec.(\alpha - \beta = \frac{\sec.\alpha\,.\sec.\beta}{1 + \sqrt{(\sec.^2\alpha - 1)}\,\sqrt{(\sec.^2\beta - 1}}.$

3) Setzt man in der Formel des Lehrsatzes $\alpha = \beta$, so bekömmt man

$$\sec.2\alpha = \frac{r.\sec.^2\alpha}{r^2 - (\sec.^2\alpha - r^2)} = \frac{r.\sec.^2\alpha}{2r^2 - \sec.^2\alpha}.$$

4) Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, so ist aus Zus. 3

$$\sec.\gamma = \frac{r.\sec.^2\frac{1}{2}\gamma}{2r^2 - \sec.^2\frac{1}{2}\gamma}.$$

§. 31.

VI. Aus folgender Gleichung erhält man die Cosecante von der Summe zweyer Winkel α und β:

$$\text{cosec.}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{cosec.}\ \alpha\ .\ \text{cosec.}\ \beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\alpha - r^2)} + \sqrt{(\text{cosec.}^2\beta - r^2)}}.$$

Beweis:

Th.) $\text{cosec.}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{cosec.}\ \alpha\ .\ \text{cosec.}\ \beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\alpha - r^2)} + \sqrt{(\text{cosec.}^2\beta - r^2)}}.$

D.) $\text{cosec.}\ (\alpha + \beta) = \frac{r^2}{\text{sin.}\ (\alpha + \beta)} =$

$= \frac{r^2}{(\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta + \text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta) : r}$ (§. 25 und §. 26). Dividirt man nun Zähler und Nenner durch sin. α . sin. β, so bekömmt man

$$\text{cosec.}\ (\alpha + \beta) = \left[\frac{r^2}{\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta}\right] :$$

$$\left[\frac{(\text{cos.}\ \beta) : (\text{sin.}\ \beta) + (\text{cos.}\ \alpha) : (\text{sin.}\ \alpha)}{r}\right]$$

$$= \left[\frac{r^4}{\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta}\right] : \left[\frac{r.\ \text{cos.}\ \beta}{\text{sin.}\ \beta} + \frac{r.\ \text{cos.}\ \alpha}{\text{sin.}\ \alpha}\right] =$$

$$= \left[\frac{r^2}{\text{sin.}\ \alpha} \cdot \frac{r^2}{\text{sin.}\ \beta}\right] : \left[\frac{r.\ \text{cos.}\ \beta}{\text{sin.}\ \beta} + \frac{r.\ \text{cos.}\ \alpha}{\text{sin.}\ \alpha}\right] =$$

$= \frac{\text{cosec.}\ \alpha\ .\ \text{cosec.}\ \beta}{\text{cotg.}\ \alpha + \text{cotg.}\ \beta}$ (§. 25 und §. 23) $=$

$= \frac{\text{cosec.}\ \alpha\ .\ \text{cosec.}\ \beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\ \alpha - r^2)} + \sqrt{(\text{cosec.}^2\ \beta - r^2)}}$ (§. 25 Zus. 2).

Zusätze:

1) $\text{cosec.}\ (\alpha - \beta) = \frac{r^2}{\text{sin.}\ (\alpha - \beta)} =$

$= \frac{r^2}{(\text{sin.}\ \alpha\ .\ \text{cos.}\ \beta - \text{cos.}\ \alpha\ .\ \text{sin.}\ \beta) : r}$ (§. 25 und §. 26 Zus. 5). Dividirt man Zähler und Nenner durch sin. α . sin. β und verfährt dann wie im Beweise des Lehrsatzes, so

findet man $\text{cosec.}(\alpha-\beta) = \frac{\text{cosec.}\,\alpha\,.\,\text{cosec.}\,\beta}{\text{cotg.}\,\beta - \text{cotg.}\,\alpha} =$
$\frac{\text{cosec.}\,\alpha\,.\,\text{cosec.}\,\beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\,\beta - r^2)} - \sqrt{(\text{cosec.}^2\,\alpha - r^2)}}.$

2) Für $r = 1$ ist

$$\text{cosec.}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{cosec.}\,\alpha\,.\,\text{cosec.}\,\beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\alpha-1)}+\sqrt{(\text{cosec.}^2\beta-1)}}$$

und $\text{cosec.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{cosec.}\,\alpha\,.\,\text{cosec.}\,\beta}{\sqrt{(\text{cosec.}^2\beta-1)}-\sqrt{(\text{cosec.}^2\alpha-1)}}.$

3) Setzt man $\alpha = \beta$, so ist aus der Formel des Lehrsatzes

$$\text{cosec.}\,2\alpha = \frac{\text{cosec.}^2\,\alpha}{\text{cosec.}^2\,\alpha - r^2}.$$

4) Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, so ist aus Zusatz 3,

$$\text{cosec.}\,\gamma = \frac{\text{cosec.}^2\,\frac{1}{2}\gamma}{\text{cosec.}^2\,\frac{1}{2}\gamma - r^2}.$$

§. 32.

VII. Setzt man $\alpha + \beta = \varphi$ und $\alpha - \beta = \varrho$, so erhält man folgende Gleichungen für den Radius 1:

1) $\sin.\varphi + \sin.\varrho = 2.\sin.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\cos.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$,

2) $\sin.\varphi - \sin.\varrho = 2.\cos.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\sin.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$,

3) $\cos.\varphi + \cos.\varrho = 2.\cos.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\cos.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$,

4) $\cos.\varrho - \cos.\varphi = 2.\sin.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\sin.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$.

Beweis:

Die hier angegebenen Formeln bilden die Thesis.

D.) Man setze $\alpha + \beta = \varphi$ und $\alpha - \beta = \varrho$, so ist daraus $\alpha = \frac{\varphi+\varrho}{2}$ und $\beta = \frac{\varphi-\varrho}{2}$, und es ist demnach für den Radius 1:

1) $\sin.\varphi + \sin.\varrho = 2.\sin.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\cos.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$ (§. 26 Zus. 6);

2) $\sin.\varphi - \sin.\varrho = 2.\cos.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\sin.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$
(§. 26 Zus. 6);

3) $\cos.\varphi + \cos.\varrho = 2.\cos.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\cos.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$
(§. 27 Zus. 8);

4) $\cos.\varrho - \cos.\varphi = 2.\sin.\left(\frac{\varphi+\varrho}{2}\right).\sin.\left(\frac{\varphi-\varrho}{2}\right)$
(§. 27 Zus. 8).

Zusätze:

Durch Zusammenstellung der bereits entwickelten Formeln lassen sich noch folgende ableiten:

1) Aus §. 28 Zus. 6 ist $\text{tg}.\varphi = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$, und $\text{tg}.\varrho = \frac{\sin.\varrho}{\cos.\varrho}$, folglich $\text{tg}.\varphi + \text{tg}.\varrho = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} + \frac{\sin.\varrho}{\cos.\varrho} =$
$$= \frac{\sin.\varphi.\cos.\varrho + \sin.\varrho.\cos.\varphi}{\cos.\varphi.\cos.\varrho} = \frac{\sin.(\varphi+\varrho)}{\cos.\varphi.\cos.\varrho}$$
(§. 26).

2) Eben so erhält man aus §. 26 Zus. 5 und §. 28 Zus. 7, $\text{tg}.\varphi - \text{tg}.\varrho = \frac{\sin.(\varphi-\varrho)}{\cos.\varphi.\cos.\varrho}$.

3) Aus §. 29 Zus. 7 folgt $\text{cotg}.\varphi = \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$, und $\text{cotg}.\varrho = \frac{\cos.\varrho}{\sin.\varrho}$, mithin $\text{cotg}.\varphi + \text{cotg}.\varrho = \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} + \frac{\cos.\varrho}{\sin.\varrho} =$
$$= \frac{\cos.\varphi.\sin.\varrho + \sin.\varphi.\cos.\varrho}{\sin.\varphi.\sin.\varrho} = \frac{\sin.(\varphi+\varrho)}{\sin.\varphi.\sin.\varrho}$$
(§. 26).

4) Eben so bekömmt man aus §. 26 Zus. 5 und §. 29 Zus. 7, $\text{cotg}.\varphi - \text{cotg}.\varrho = \frac{\sin.(\varphi-\varrho)}{\sin.\varphi.\sin.\varrho}$.

5) Aus §. 24 Zus. 3 folgt $\sec.\varphi = \frac{1}{\cos.\varphi}$, und $\sec.\varrho = \frac{1}{\cos.\varrho}$,

folglich $\sec.\varphi + \sec.\varrho = \frac{\cos.\varphi + \cos.\varrho}{\cos.\varphi \,.\, \cos.\varrho}$; substituirt man, statt $\cos.\varphi + \cos.\varrho$, den im Lehrsatze angegebenen Werth, so ist

$$\sec.\varphi + \sec.\varrho = \frac{2.\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi + \varrho) \,.\, \cos.\tfrac{1}{2}(\varphi - \varrho)}{\cos.\varphi \,.\, \cos.\varrho}.$$

6) Auf dieselbe Art bekömmt man auch

$$\sec.\varphi - \sec.\varrho = \frac{2.\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi + \varrho) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(\varphi - \varrho)}{\cos.\varphi \,.\, \cos.\varrho}.$$

7) Aus §. 25 Zus. 3 ist $\mathrm{cosec.}\varphi = \frac{1}{\sin.\varphi}$ und $\mathrm{cosec.}\varrho = \frac{1}{\sin.\varrho}$, mithin $\mathrm{cosec.}\varphi + \mathrm{cosec.}\varrho = \frac{\sin.\varphi + \sin.\varrho}{\sin.\varphi \,.\, \sin.\varrho}$; substituirt man, statt $\sin.\varphi + \sin.\varrho$, den im Lehrsatze angegebenen Werth, so erhält man

$$\mathrm{cosec.}\varphi + \mathrm{cosec.}\varrho = \frac{2.\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi + \varrho) \,.\, \cos.\tfrac{1}{2}(\varphi - \varrho)}{\sin.\varphi \,.\, \sin.\varrho}.$$

8) Auf dieselbe Art erhält man auch

$$\mathrm{cosec.}\varrho - \mathrm{cosec.}\varphi = \frac{2.\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi + \varrho) \,.\, \sin.\tfrac{1}{2}(\varphi - \varrho)}{\sin.\varphi \,.\, \sin.\varrho}.$$

Anmerkung: Ausser den bereits angegebenen Formeln läßt sich zu trigonometrischen oder analytischen Untersuchungen noch eine große Anzahl entwickeln. Die hier aufgefundenen sind die vorzüglichsten, und können dazu dienen, sich in der trigonometrischen Analysis eine gewisse Fertigkeit zu erwerben.

C.

Von den trigonometrischen Tabellen.

a) Erklärungen.

§. 33.

Man findet in den Tabellen über die trigonometrischen Linien immer nur die Sinus, Cosinus, Tangenten und Co-

tangenten angegeben, weil die Secanten und Cosecanten nur selten vorkommen, und in diesem Falle auch leicht aus den genannten Linien zu berechnen wären; denn es ist bekanntlich sec. x $= \frac{r^2}{\cos. x}$ (§. 24) $= \frac{r^2}{\sin. (90^0 - x)}$ (§. 6) $= \sqrt{(r^2 + tg.^2 x)}$ (§. 24 Zus. 4) und cosec. x $= \frac{r^2}{\sin. x}$ (§. 25) $= \frac{r^2}{\cos. (90^0 - x)}$ (§. 6) $= \sqrt{(r^2 + cotg.^2 x)}$ (§. 25 Zus. 2).

Eben so ist auch der Sinusversus und der Cosinusversus entbehrlich.

§. 34.

Die Cosinus und Contangenten gegebener Winkel oder Bögen sind nichts anderes, als die trigonometrischen Functionen derjenigen Winkel oder Bögen, welche jene zu 90 Grade ergänzen. Es sind daher zur Vereinfachung der trigonometrischen Tabellen in denselben die Funktionen meistens nur bis zu 45 Grade angegeben; denn z. B. sin. $48^0 =$ cos. $(90^0 - 48^0) =$ cos. 42^0; cos. $75^0 =$ sin. $(90^0 - 75^0) =$ sin. 15^0; tg. $82^0\ 30^1 =$ cotg. $(90^0 - 82^0\ 30^1) =$ cotg. $7^0\ 30^1$; und cotg. $55^0\ 12^1 =$ tg. $(90^0 - 55^0\ 12^1) =$ tg. $34^0\ 48^1$ u. s. w.

Durch solche Tabellen sind dann auch die trigonometrischen Funktionen für stumpfe und erhabene Winkel der Größe nach bekannt, weil sie jenen ihrer Supplemente gleich sind, nur muß hierbei hinsichtlich ihrer Lage auf die Zeichen Rücksicht genommen werden. Z. B. cos. $125^0 = -$ cos. 55^0, sin. $200^0 = -$ sin. 20^0 u. s. w.

§. 35.

Es gibt zweyerlei **trigonometrische Tabellen**; entweder ist die wahre Größe der trigonometrischen Linien darin enthalten, oder es sind es die Logarithmen dieser Linien. Erstere findet man gewöhnlich für den Radius 1, letztere aber für den Radius 10000000000 berechnet.

Um einen Logarithmus für den Radius 10000000000 in denjenigen für den Radius 1 zu verwandeln, darf man nur von der Charakteristik des ersteren 10 abziehen; denn Sin. x : sin. x = 10000000000 : 1 (§. 18.),

woraus $\sin. x = \frac{\text{Sin. } x.}{10000000000}$ oder

$\log. \sin. x = \log. \text{Sin. } x - \log. 10000000000$

$\log. \sin. x = \log. \text{Sin. } x - 10.$

Und umgekehrt, um einen Logarithmus für den Radius 1 in den für den Radius 10000000000 zu verwandeln, addire man zu der Charakteristik des ersteren 10; denn aus obiger Gleichung folgt

$$\log. \text{Sin. } x = \log. \sin. x + 10.$$

Sollen aus den trigonometrischen Linien für den Radius 1, jene für einen andern beliebigen Radius R berechnet werden, so multiplizire man die Größe der Linien nach ersterem Radius genommen mit R; denn

Sin. x : sin. x = R : 1 (§. 18.), woraus

$$\text{Sin. } x = R \sin. x.$$

Da hieraus $\sin. x = \frac{\text{Sin. } x}{R}$, so erhält man die trigonometrischen Linien für den Radius 1, wenn man die Größe der Linien nach dem gegebenen Radius durch diesen selbst dividirt.

b) Berechnung der trigonometrischen Linien mit Hülfe der Elementar-Mathematik.

§. 36.

Nach §. 26. ist für r=1, $\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha. \cos. \beta + \cos. \alpha. \sin. \beta$,
und nach §. 27, $\cos. (\alpha + \beta) = \cos. \alpha. \cos. \beta - \sin. \alpha. \sin. \beta$.
Setzt man hier $\alpha = 1''$, so ist

$\sin. (1'' + \beta) = \sin. 1''. \cos. \beta + \cos. 1''. \sin. \beta.$

und $\cos. (1'' + \beta) = \cos. 1''. \cos. \beta - \sin. 1''. \sin. \beta.$

Substituirt man der Ordnung nach für β die Größen von $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ u. s. w., so erhält man

$$\sin. 2'' = \sin. 1''. \cos. 1'' + \cos. 1''. \sin. 1''$$
$$= 2. \sin. 1''. \cos. 1'' \text{ (§. 26. Zus. 2.)}$$
$$\sin. 3'' = \sin. 1''. \cos. 2'' + \cos. 1''. \sin. 2''$$
$$= 3 \cos.^2 1''. \sin. 1'' - \sin.^3 1'' \text{ (§. 27.}$$

Zus. 3.) u. s. w.

Man sieht hieraus, daß es vor allem nothwendig ist, den Sinus von einer Sekunde zu wissen. Um denselben zu berechnen, sage man: Ein unendlich kleiner Bogen fällt mit seiner dazugehörigen Sehne ganz zusammen, folglich ist auch der Sinus von einer Sekunde dem Bogen von einer Sekunde gleich. Es ist für die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist, $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ folglich ist der Bogen von einer Sekunde oder $\sin. 1'' =$

$$\frac{\pi}{180.60.60} = \frac{3{,}141592653589793}{648000} = 0{,}0000048481\ldots$$

Ferners ist aus §. 19. also $\cos. 1'' =$

$$\sqrt{[(1+\sin.1'')(1-\sin.1'')]} = \sqrt{[0{,}99999999976496896\ldots]}$$
$$= 0{,}99999999998\ldots\ldots$$

Nun kann man aus diesem Sinus und Cosinus von $1''$ nach oben angegebener Art $\sin. 2''$, $\sin. 3''$, $\sin. 4''\ldots\ldots$ $\sin. 10''$, dann $\sin. 20''$, $\sin. 30''\ldots\ldots \sin. 60''$ oder $\sin. 1'$, hierauf $\sin. 2'$, $\sin. 3'$, $\ldots\ldots \sin. 60'$ oder $\sin. 1°$, und endlich $\sin. 2°$, $\sin. 3°\ldots\ldots \sin. 45°$ berechnen.

Hat man einmal die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45° gefunden, so kann man nach den bekannten Formeln auch die Werthe der übrigen trigonometrischen Funktionen bestimmen.

§. 37.

Bey diesen Berechnungen der trigonometrischen Tabellen bedient man sich noch folgender Abkürzungen.

Ist die Größe eines Bogens oder Winkels durch eine theilbare Zahl ausgedrückt, so kann man die Formeln

§. 26. Zus. 2. und §. 27. Zus. 3 gebrauchen, wo es heißt $\sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha \cos. \alpha$,

$\sin. 3\alpha = 3 \sin. \alpha \cos.^2\alpha - \sin.^3\alpha$ u. s. w.

$\cos. 2\alpha = \cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha$,

$\cos. 3\alpha = \cos.^3\alpha - 3\sin.^2\alpha \,.\, \cos. \alpha$ u. s. w.

z. B. $\sin. 30^\circ = 3 \sin. 10^\circ \,.\, \cos.^2 10^\circ - \sin.^3 10^\circ$, und

$\cos. 30^\circ = \cos.^3 10^\circ - 3 \sin.^2 10^\circ \,.\, \cos. 10^\circ$.

Eine besondere Abkürzung besteht noch in Folgendem, wenn man einmal die Sinus und Cosinus aller Winkel oder Bögen bis 30° hat, die noch fehlenden bis 45° zu finden.

Es ist $\sin. (\alpha + \beta) + \sin. (\alpha - \beta) = 2\sin. \alpha \,.\, \cos. \beta$ (§. 26 Zus. 6), hieraus ist $\sin. (\alpha + \beta) = 2 \sin. \alpha \,.\, \cos. \beta - \sin. (\alpha - \beta)$. Setzt man nun $\alpha = 30^\circ$, so ist $\sin. \alpha = \frac{1}{2}$ (§. 13 Zus. 1) und folglich $\sin. (30^\circ + \beta) = \cos. \beta - \sin. (30^\circ - \beta)$;

z. B. $\sin. (30^\circ + 6^\circ) = \sin. 36^\circ = \cos. 6^\circ - \sin. 24^\circ$,

$\sin.(30^\circ + 12^\circ 30') = \sin. 42^\circ 30' = \cos. 12^\circ 30' - \sin. 17^\circ 30'$ u. s. w.

Eben so ist $\cos. (\alpha + \beta) - \cos. (\alpha - \beta) = -2\sin.\alpha \,.\, \sin. \beta$ (§.27 Zus.9), und hieraus $\cos. (\alpha + \beta) = \cos.(\alpha - \beta) - 2\sin.\alpha.\sin.\beta$. Setzt man hier auch $\alpha = 30^\circ$, so erhält man $\cos. (30^\circ + \beta) = \cos. (30^\circ - \beta) - \sin. \beta$, und also

z. B. $\cos. (30^\circ + 15^\circ) = \cos. 45^\circ = \cos. 15^\circ - \sin. 15^\circ$,

$\cos. 30^\circ + 18^\circ 16') = \cos. 48^\circ 16' = \cos. 41^\circ 44' - \sin. 18^\circ 16'$ u. s. w.

Anmerkung: Am kürzesten geschieht diese Berechnung jedoch nach der höhern Analysis mit Hülfe der trigonometrischen Reihen.

§. 38.

Da die trigonometrischen Rechnungen durch den Gebrauch der Logarithmen sehr vereinfacht werden, so wurden auch die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen berechnet und in eine Tabelle zusammengestellt. Man berechnet diese Logarithmen entweder nach den Regeln der Elementar-Arithmetik aus den bereits gefundenen Werthen der

trigonometrischen Funktionen oder nach der höhern Analysis mit Hülfe unendlicher Reihen, ohne daß man zuvor die Werthe der trigonometrischen Funktionen selbst zu kennen braucht.

§. 39.

Die vorzüglichsten trigonometrischen Tabellen sind diejenigen von dem berühmten Mathematiker, dem k. k. östreichischen Artillerie-Oberstlieutenant, Georg Freyherrn von Vega, unter dem bekannten Titel: „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch.“ Zu sehr genauen Berechnungen eignet sich jedoch noch mehr die von diesem unermüdeten Mathematiker verfaßte vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (Thesaurus logarithmorum completus in Folio) auf 10 Decimalstellen.

Sehr zu empfehlen ist das in dieser Beziehung für die östreichische Artillerie erschienene neueste Werk: „Logarithmisches und logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, mit einem Anhang von mehrern für die Ausübung unentbehrlichen Tafeln und Formeln von Ignaz Lindner, Major und Professor der Mathematik im k. k. Bombardier-Corps, zweyte verbesserte und sehr vermehrte Auflage, Wien 1831.“

Sehr beliebt sind auch die Tables portatives de Logarithmes par Callet, welche auch die Logarithmen für die in Frankreich gebräuchliche neuere Centesimal-Eintheilung enthalten.

In jedem solchen Werke ist in der Einleitung die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tabellen erklärt, und es fällt daher hier dieselbe weg.

II. Hauptstück.

Die reine ebene Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Berechnung der Seiten und Winkel in ebenen Dreyecken.

A.

In rechtwinklig-ebenen Dreyecken.

§. 40.

Lehrsätze.

I. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke verhält sich die Hypothenuse zu einer der Katheten eben so, wie der Radius zu dem Sinus des, der genannten Kathete gegenüberstehenden Winkels.

Beweis: (Fig. 2)

Th.) $AC : AB = r : \sin y$.

D.) $ABC = R$, mithin $AB = \sin. y$, wenn $AC = r$ (§. 5 Zus. 6). Es entsteht also die Proportion

$$AC : AB = r : \sin. y.$$

Zusätze:

1) Da $\sin. 90^\circ = r =$ sinus totus ist (§. 5 Zus. 1), so erhält man $AC : AB = \sin. tot. : \sin. y$.

2) Ist $r = 1 = \sin. tot.$, so entsteht die Proportion $AC : AB = 1 : \sin. y$.

3) Aus der Proportion $AC : AB = r : \sin. y$ entstehen folgende 4 Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreyecken:

$$AC = \frac{r. AB}{\sin. y},$$

$$AB = \frac{AC . \sin. y}{r},$$

$$r = \frac{AC \cdot \sin. y}{AB} \text{ und}$$

$$\sin. y = \frac{r. AB}{AC}.$$

§. 41.

II. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke verhält sich die Hypothenuse zu einer der Katheten, wie der Radius zum Cosinus des, dieser Kathete anliegenden spitzen Winkels.

Beweis: (Fig. 2)

Th.) $AC : AB = r : \cos. x.$

D.) $ABC = R$, also $AB = \cos. x$, wenn $AC = r$ (§. 6 Zus. 7), woraus die Proportion entsteht

$AC : AB = r : \cos. x.$

Zusätze:

1) Da $\sin. 90^\circ = r = \sin. tot.$ ist (§. 5 Zus. 1), so erhält man die Proportion

$AC : AB = \sin. tot. : \cos. x.$

2) Setzt man $r = 1$, so entsteht

$AC : AB = 1 : \cos. x.$

3) Aus der Proportion $AC : AB = r : \cos. x$, bekömmt man folgende 4 Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreyecken:

$$AC = \frac{r. AB}{\cos. x},$$

$$AB = \frac{AC \cdot \cos. x}{r},$$

$$r = \frac{AC \cdot \cos. x}{AB} \text{ und}$$

$$\cos. x = \frac{r. AB}{AC}.$$

§. 42.

III. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke verhält sich die eine der Katheten zur andern, wie der Radius zur

Tangente des, der letztern Kathete gegenüberstehenden, Winkels.

Beweis: (Fig. 2)

Th.) $AB : BC = r : tg.\ x.$

D.) $ABC = R$, folglich $BC = tg.\ x$, wenn $AB = r$ (§. 9 Zus. 6), woraus die Proportion entsteht

$$AB : BC = r : tg.\ x.$$

Zusätze:

1) Da $\sin. 90^{\circ} = r = \sin. tot.$ (§. 5 Zus. 1), so erhält man $AB : BC = \sin. tot. : tg.\ x.$

2) Für $r = 1$ entsteht die Proportion

$$AB : BC = 1 : tg.\ x.$$

3) Aus der Proportion $AB : BC = r : tg.\ x$ erhält man folgende 4 Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreyecken:

$$AB = \frac{r.\ BC}{tg.\ x},$$

$$BC = \frac{AB\ .\ tg.\ x}{r},$$

$$r = \frac{AB\ .\ tg.\ x}{BC} \text{ und}$$

$$tg.\ x = \frac{r.\ BC}{AB}.$$

§. 43.

IV. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke verhält sich die eine der Katheten zur andern, wie der Radius zur Cotangente des, der letztern Kathete anliegenden spitzen, Winkels.

Beweis: (Fig. 2)

Th.) $AB : BC = r : cotg.\ y.$

D.) $ABC = R$, mithin $BC = cotg.\ y$, wenn $AB = r$ (§. 10 Zus. 6), woraus die Proportion entsteht:

$$AB : BC = r : cotg.\ y.$$

Zusätze:

1) Da $\sin. 90^{\circ} = r = \sin. tot.$ (§. 5 Zus. 1), so ist $AB : BC = \sin. tot. : cotg.\ y.$

2) Für den Radius 1 entsteht die Proportion

$AB : BC = 1 : \text{cotg. } y.$

3) Aus der Proportion $AB : BC = r : \text{cotg. } y$ bilden sich folgende 4 Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreyecken:

$$AB = \frac{r.\ BC}{\text{cotg. } y},$$

$$BC = \frac{AB\ .\ \text{cotg. } y}{r},$$

$$r = \frac{AB\ .\ \text{cotg. } y}{BC} \text{ und}$$

$$\text{cotg. } y = \frac{r.\ BC}{AB}.$$

B.

In schiefwinklig-ebenen Dreyecken.

§. 44.

Lehrsätze.

I. In einem jeden Dreyecke verhalten sich zwey Seiten zu einander, wie die Sinus der, ihnen gegenüberstehenden, Winkel.

Beweis: (Fig. 8)

Th.) $AB : BC = \sin. C : \sin. A.$

D.) Man beschreibe um das Dreyeck ABC einen Kreis, ziehe die Radien AD, BD und CD, und die Senkrechten DE und DF auf die in Proportion gesetzten Seiten, so wird

$BF = \frac{1}{2} BC = \sin. \frac{1}{2} BDC$ (§. 13 Zus. 2)

$= \sin. A$ (Geometrie).

$AE = \frac{1}{2} AB = \sin. \frac{1}{2} ABD$ (§. 13 Zus. 2)

$= \sin. C$ (Geometrie).

Es ist demnach $\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} BC = \sin. C : \sin. A$

oder $AB : BC = \sin. C : \sin. A.$

Zusätze:

1) Auf dieselbe Art beweiset man auch, daß
AB : AC = sin. C : sin. B und
BC : AC = sin. A : sin. B.

2) Diese Proportionen gelten nicht blos für den Radius AD = BD = CD, sondern für jeden andern, also auch für jenen der Tabellen.

§. 45.

II. In einem jeden Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der, diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel.

Beweis: (Fig. 9)

Man setze BC = a, AC = b und a > b, so erhält man

Th.) $a + b : a - b = tg. \frac{1}{2} (A + B) : tg. \frac{1}{2} (A - B)$.

D.) Man beschreibe mit der größern Seite a der zwey gegebenen aus dem Punkte C, wo diese zusammenstoßen, einen Kreis, verlängere AC nach beyden Seiten zu bis an die Peripherie, ziehe DB und BE, errichte in E eine Senkrechte, und schneide dieselbe durch die Verlängerung von AB in F ab; so wird

$m = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} (n + y) = \frac{1}{2} (A + B)$ (Geom.)
$n = m + z$ (Geom.), also $z = n - m = A - \frac{1}{2} (A + B) = \frac{1}{2} (A - B)$.

Ferners ist $x = n$, und da DB # EF (Geom.), so ist $q = v$, mithin △ AEF ∽ ABD, woraus

DB : EF = AD : AE folget, oder
= CD + AC : CE — AE, oder
= a + b : a — b (verm. Constr.).

Da im △ FEB der Winkel FEB = R, so ist für den Radius oder sinus totus 1

EB : EF = 1 : tg. z (§. 42 Zus. 2) oder
EB : EF = 1 : tg. $\frac{1}{2}$ (A — B).

Eben so ist im $\triangle$ DBE der Winkel DBE $= R$, also für den Radius oder sinus totus 1

$$BE : BD = 1 : tg.\, m \text{ (§. 42 Zus. 2)}$$

$$\text{oder } BE : BD = 1 : tg.\, \tfrac{1}{2}(A + B).$$

$$\text{Weil nun } BE : EF = 1 : tg.\, \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$\text{so ist auch } BD : EF = tg.\, \tfrac{1}{2}(A + B) : tg.\, \tfrac{1}{2}(A - B).$$

$$\text{Indem auch } BD : EF = a + b : a - b \text{ (sehe oben)}$$

$$\text{folglich } a + b : a - b = tg.\, \tfrac{1}{2}(A + B) : tg.\, \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Zusätze:

1) Diese Proportion gilt für jeden beliebigen Radius, mithin auch für jenen der Tabellen.

2) Auf dieselbe Art kann man auch zeigen, wenn man AB $= c$ setzt, daß
$$a + c : a - c = tg.\, \tfrac{1}{2}(A + C) : tg.\, \tfrac{1}{2}(A - C) \text{ und}$$
$$b + c : b - c = tg.\, \tfrac{1}{2}(B + C) : tg.\, \tfrac{1}{2}(B - C).$$

3) Ist C gegeben, so ist $A + B = 180° - C$, und $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90° - \tfrac{1}{2}C$. Aus der Proportion des Lehrsatzes ist
$$tg.\, \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{(a - b)\,.\, tg.\,(90° - \tfrac{1}{2}C)}{a + b}, \text{ und}$$
$$log.tg.\tfrac{1}{2}(A - B) = log.(a - b) + log.tg.(90° - \tfrac{1}{2}C) - log.(a + b).$$
Hat man hieraus nun $\tfrac{1}{2}(A - B)$ gefunden, so ist endlich $\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B) = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B = A$, und $\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B) = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = B$.

4) Setzt man $A + B = 90°$ und
$$A - B = x$$
so wird $2A = 90° + x$, also x oder $A - B = 2A - 90°$.
Ist nun $A + B = 90°$, so ist auch $C = 90°$ (Geom.),
$$\text{folglich } tg.\, \tfrac{1}{2}(2A - 90°) = \frac{(a - b)\,.\, tg.\, 45°}{a + b} \text{ (Zus. 3)},$$
$$tg.\,(A - 45°) = \frac{(a - b)\, r}{a + b} \text{ (§. 16) oder}$$
$$\frac{(tg.\, A - tg.\, 45°)\, r^2}{r^2 + tg.\, A\; tg.\, 45°} = \frac{(a - b)\, r}{a + b} \text{ (§. 28 Zus. 2)}$$

$$\frac{r^2 \cdot tg.\, A - r^3}{r^2 + r \cdot tg.\, A} = \frac{a\, r - b\, r}{a + b}$$

$$\frac{r \cdot tg.\, A - r^2}{r + tg.\, A} = \frac{a\, r - b\, r}{a + b}$$

$ar.tg.A + br.tg.A - ar^2 - br^2 = ar^2 - br^2 + ar.tg.A - br.tg.A$

$2\, b\, r \cdot tg.\, A = 2a\, r^2$ und

endlich $tg.\, A = \frac{a\, r}{b}$ (man vergleiche §. 42 Zus. 3).

5) Ist im rechtwinkligen Dreyecke auch $a = b$, so ist $A = 45°$ (Geom.), mithin $tg.\, A = tg.\, 45° = r$ (man vergleiche §. 16).

§. 46.

III. In einem jeden Dreyecke ist jede der Seiten gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten weniger des doppelten Produktes aus diesen zwey Seiten mit dem Cosinus des davon eingeschlossenen Winkels.

Beweis: (Fig. 10)

Setzt man $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und $BAC = \alpha$, so erhält man

Th.) $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cdot \cos.\, \alpha)}$.

D.) Man fälle BD senkrecht auf AC, und setze $AD = x$, so ist $CD = b - x$.

Im $\triangle$ ADB ist $BD^2 = AB^2 - AD^2 = c^2 - x^2$, und im $\triangle$ BDC ist $BD^2 = BC^2 - CD^2 = a^2 - (b - x)^2 = a^2 - b^2 + 2\, b\, x + x^2$.

Mithin ist $c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2\, b\, x + x^2$,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, x$ und

$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\, b\, x)}$.

Nun ist aus dem $\triangle$ ADB für $r = 1$

$AB : AD = 1 : \cos.\, \alpha$ (§. 41 Zus. 2) oder

$c : x = 1 : \cos.\, \alpha$, woraus

$x = c \cdot \cos.\, \alpha$.

Diesen Werth für x in obige Formel substituirt, gibt
$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,.\,\cos.\,\alpha)}$.

Zusätze:

1) Eben so erhält man auch

$$b = \sqrt{(a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,.\,\cos.\,B)} \text{ und}$$
$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,.\,\cos.\,C)}.$$

2) Diese Formeln gelten jedoch nur für den Radius 1, weshalb bey Berechnungen darauf Rücksicht genommen werden muß (§. 35).

3) Setzt man in diesen Formeln den von den beiden gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkeln gleich 90°, so erhält man die Formel des pythagorischen Lehrsatzes; denn ist z. B. $\alpha = 90^\circ$, so ist $\cos.\,\alpha = 0$ (§. 6 Zus. 2), und mithin $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$ (Geometrie).

4) Ist α ein stumpfer Winkel, so wird $\cos.\,\alpha$ negativ (§. 6 Zus. 4), und es ist für diesen Fall

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,.\,\cos.\,\alpha)}.$$

§. 47.

IV. Man erhält aus zwey Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel eines Dreyeckes die Tangente eines jeden der andern zwey Winkel, wenn man das Produkt aus der ihm gegenüberstehenden Seite mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, durch die Differenz zwischen der andern Seite und dem Produkte aus der gegenüberstehenden Seite mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels dividirt (für den Radius oder sinus totus 1).

Beweis: (Fig. 10)

Setzt man AB = c, AC = b und BC = a, so bekömmt man

$$\text{Th.)}\ \text{tg.}\ C = \frac{c\,.\,\sin.\,\alpha}{b - c\,.\,\cos.\,\alpha}.$$

D.) Man fälle BD senkrecht auf AC, so ist im △ BDC

$$CD : BD = 1 : \text{tg.}\ C \text{ (§. 42 Zus. 2)},$$

woraus $\text{tg.}\ C = \frac{BD}{CD}$ folgt.

Nun ist im $\triangle$ ADB

$$AB : BD = 1 : \sin.\ \alpha \text{ (§. 40 Zus. 2)},$$

also $BD = AB \,.\, \sin.\ \alpha = c \,.\, \sin.\ \alpha$.

In demselben Dreyecke ist

$$AB : AD = 1 : \cos.\ \alpha \text{ (§. 41 Zus. 2)},$$

folglich $AD = AB \,.\, \cos.\ \alpha = c \,.\, \cos.\ \alpha$.

Da $CD = AC - AD$, so ist auch

$$CD = b - c \,.\, \cos.\ \alpha.$$

Es ist demnach $tg.\ C = \frac{c \,.\, \sin.\ \alpha}{b - c \,.\, \cos.\ \alpha}$, denn tg. C ist nach oben gleich $\frac{BD}{CD}$.

Zusätze:

1) Verfolgt man denselben analytischen Weg, so ergibt sich zur Berechnung des andern Winkels B,

$$tg.\ B = \frac{b \,.\, \sin.\ \alpha}{c - b \,.\, \cos.\ \alpha}.$$

2) Diese Formeln sind für den Radius 1 entworfen worden, gelten demnach auch nur für denselben, welches bey Berechnungen berücksichtigt werden muß (§. 35).

3) Setzt man den von den zwey gegebenen Seiten b und c eingeschlossenen Winkel $\alpha = 90°$, so wird $tg.\ C = \frac{c \,.\, r}{b}$ (§. 5 Zus. 1 und §. 6 Zus. 2) und $tg.\ B = \frac{b \,.\, r}{c}$ (§. 5 Zus. 1 und §. 6 Zus. 2). (Man vergleiche §. 42 Zus. 3.)

4) Setzt man $\alpha = 90°$ und $b = c$, so wird $C = B = 45°$ (Geom.), und folglich nach der Formel des Lehrsatzes $tg.\ C = tg.\ B = tg.\ 45° = r$ (man vergleiche §. 16).

5) Ist α ein stumpfer Winkel, so wird $\cos.\ \alpha$ negativ (§. 6 Zus. 4), und es ist für diesen Fall dann

$$tg.\ C = \frac{c \,.\, \sin.\ \alpha}{b + c \,.\, \cos.\ \alpha} \text{ und } tg.B = \frac{b \,.\, \sin.\ \alpha}{c + b \,.\, \cos.\ \alpha}.$$

6) Erhält man für tg. C oder tg. B einen negativen

Werth, so bedeutet dieses, daß C oder B ein stumpfer Winkel seyn muß (§. 9 Zus. 3 und 4).

§. 48.

V. In einem jeden Dreyecke erhält man den Cosinus eines Winkels, wenn man von der Summe der Quadrate der ihn einschließenden Seiten das Quadrat der ihm gegenüberstehenden Seite subtrahirt, und diesen Unterschied durch das doppelte Produkt der ihn einschließenden Seiten dividirt (für den Radius oder sinus totus 1).

Beweis: (Fig. 10.)

Setzt man AB = c, AC = b und BC = a, so erhält man

Th.) $\cos.\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ b\ c}$.

D.) Es ist $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\ b\ c.\cos.\ \alpha)}$ (§. 46), und hieraus $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ .\ \cos.\ \alpha$,

$$\cos.\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ b\ c}.$$

Zusätze:

1) Der Analogie nach ist auch

$$\cos.\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\ a\ c}\ \text{und}$$

$$\cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ a\ b}.$$

2) Diese Formeln sind nur für den Radius 1 gültig, welches man bey Berechnungen nicht ausser Acht lassen darf (§. 35).

3) Wäre in der Formel des Lehrsatzes $a^2 = b^2 + c^2$, so ist a die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes; denn $\cos.\ \alpha = \frac{0}{2\ b\ c} = 0$, nämlich $\alpha = 90°$ (§. 6 Zus. 2).

4) Ist aber $a^2 > b^2 + c^2$, so wird cos. α negativ, d. h. α ist ein stumpfer Winkel (§. 6 Zus. 4 und 5).

§. 49.

VI. In einem jeden Dreyecke ist der Sinus eines jeden Winkels einem Bruche gleich, welcher die Quadratwurzel aus dem Produkte von vier Faktoren, wovon der erste die Summe der drey Seiten, jeder der übrigen aber die Summe zweyer Seiten weniger der dritten ist — zu seinem Zähler — und das doppelte Produkt aus den zwey einschließenden Seiten des zu suchenden Winkels zu seinem Nenner hat.

Beweis: (Fig. 10.) Setzt man BC = a, AC = b und AB = c, so erhält man

Th.) $\sin.\alpha = \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2\,a\,b}$.

D.) Für den Radius 1 ist nach §. 19 Zus. 3

$$\sin.\,\alpha = \sqrt{[(1+\cos.\,\alpha)\,(1-\cos.\,\alpha)]}.$$

Es ist aber $1+\cos.\,\alpha = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$ (§. 48)

$$= \frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2\,b\,c}.$$

Und $1-\cos.\,\alpha = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$ (§. 48)

$$= \frac{2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{2\,b\,c}.$$

Folglich $\sin.\alpha = \sqrt{\left\{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4\,b^2\,c^2}\right\}}$

$$= \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2\,b\,c}.$$

Zusätze:

1) Auf demselben analytischen Wege bekömmt man auch:

$$\sin. B = \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2\,a\,c}$$

$$\text{und } \sin. C = \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2\,a\,b}.$$

2) Diese Formeln sind für den Radius 1 entworfen, welches man bey Berechnungen nicht ausser Acht lassen darf (§. 35).

3) Setzt man in der Formel des Lehrsatzes $a^2 = b^2 + c^2$, so erhält man

$$1 + \cos. \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\,b\,c} = \frac{2\,b\,c}{2\,b\,c} = 1$$

$$\text{und } 1 - \cos. \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\,b\,c} = \frac{2\,b\,c}{2\,b\,c} = 1,$$

also $\sin. \alpha = \sqrt{1} = 1$; d. h. der Sinus α ist dem Radius gleich, folglich $\alpha = 90^\circ$ (§. 6 Zus. 2).

4) Nimmt man $a = b = c$ an, so erhält man $\sin. \alpha = \frac{\sqrt{3\,a^4}}{2\,a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; d. h. $\alpha = 60^\circ$ (§. 14 Zus. 1) $= B = C$ (Geom.).

5) Setzt man in der Formel des Lehrsatzes $a + b + c = 2S$, also $S = \frac{a + b + c}{2}$, so ist

$$\sin.\alpha = \frac{\sqrt{\{2S(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)\}}}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{\sqrt{\{2\,S\,(2\,S-2\,a)\,(2\,S-2\,b)\,(2\,S-2\,c)\}}}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{\sqrt{\{2\,S\,[2\,(S-a)\,2\,(S-b)\,2\,(S-c)]\}}}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{2}{b\,c}\sqrt{\{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c\}}.$$

Und eben so $\sin. B = \frac{2}{ac} \sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}}$,

so wie $\sin. C = \frac{2}{ab} \sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}}$.

§. 50.

VII. In einem jeden Dreyecke ist der Sinus eines jeden halben Winkels gleich der Quadratwurzel aus einem Bruche, der das Produkt aus der halben Summe der drey Seiten weniger einer der ihn einschließenden mit der halben Summe der drey Seiten weniger der andern einschließenden zu seinem Zähler und das Produkt aus den beyden einschließenden Seiten zu seinem Nenner hat:

Beweis: (Fig. 10.) Setzt man $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und $\frac{a+b+c}{2} = S$, so wird

Th.) $\sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left\{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}\right\}}$.

D.) Für den Radius 1 ist nach §. 27 Zus. 6

$$\sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. \alpha}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]\right\}} \text{ (§. 48)}$$

$$= \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right]\right\}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4bc}\right]}.$$

Setzt man nun $\frac{a+b+c}{2} = S$, d. h. $a+b+c = 2S$,

so ist $\sin. \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left[\frac{(2 S - 2 c)\ (2 S - 2 b)}{4 b c}\right]}$

$$= \sqrt{\left[\frac{2 (S - c)\ 2 (S - b)}{4 b c}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(S - b)\ (S - c)}{b c}\right]}.$$

Zusätze:

1) Auf dieselbe Art findet man

$$\sin. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left\{\frac{(S - a)\ (S - c)}{a c}\right\}} \text{ und}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{\frac{(S - a)\ (S - b)}{a b}\right\}}.$$

2) Diese Formeln sind für den Radius 1 entwickelt worden, welches man bey Berechnungen berücksichtigen muß (§. 35).

3) Setzt man $a^2 = b^2 + c^2$, so verwandelt sich die Formel des Lehrsatzes in

$$\sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[\frac{2 b c - b^2 - c^2 + b^2 + c^2}{2 b c}\right]\right\}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2 b c}{4 b c}\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \text{d. h. } \tfrac{1}{2} \alpha = 45^\circ$$

(§. 14 Zus. 2), also $\alpha = 90^\circ$.

4) Auf ähnliche Weise, wie für $\sin. \frac{1}{2} \alpha$, kann man auch für $\cos. \frac{1}{2} \alpha$ eine Formel aus den drey Seiten des Dreyeckes entwickeln; denn nach §. 27 Zus. 6 ist

$$\cos. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left\{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}\right]\right\}} \ (\text{§. } 48)$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{2 b c + b^2 + c^2 - a^2}{4 b c}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4 b c}\right\}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\left\{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4\,b\,c}\right\}}$$
$$= \sqrt{\left\{\frac{(a+b+c)\,(a+b+c-2\,a)}{4\,b\,c}\right\}}.$$

Nimmt man nun auch hier $a+b+c = 2\,S$, so wird

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\left[\frac{2S\,(2S-2a)}{4\,b\,c}\right]} = \sqrt{\left[\frac{2S(S-a)2}{4\,b\,c}\right]}$$
$$= \sqrt{\left[\frac{S\,(S-a)}{b\,c}\right]}.$$

5) Der Analogie nach folgt aus Zusatz 4, daß

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\left[\frac{S\,(S-b)}{a\,c}\right]}$$ und

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\left[\frac{S\,(S-c)}{a\,b}\right]}.$$

II. Abschnitt.

Berechnung der Flächeninhalte ebener Dreyecke.

A.

In rechtwinklig-ebenen Dreyecken.

§. 51.

Lehrsätze.

I. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ist gleich dem Produkte aus dem halben Quadrate der Hypothenuse mit dem Sinus und Cosinus eines ihr anliegenden Winkels.

Beweis: (Fig. 11.).

Th) $\triangle\ ABC = \frac{b^2}{2}.\ \sin.\ y.\ \cos.\ y.$

D) $\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ AB.\ BC$ (Geom.) $= \frac{1}{2}\ ac.$

Nun ist $a = b\ \cos.\ y$ und $c = b\ \sin.\ y$ (§. 40. u. 41 Zus. 2.), folglich $\triangle\ ABC = \frac{b^2}{2}\ \sin.\ y.\ \cos.\ y.$

Zusätze:

1) Ebenso ist auch $\triangle$ ABC $= \frac{b^2}{2}$ sin. x. cos. x.

2) Da sin. x $=$ cos. y oder cos. x $=$ sin. y (§. 6.), so ist auch $\triangle$ ABC $= \frac{b^2}{2}$. sin. x. sin. y.

3) Ist x $=$ y $= 45^0$, so wird $\triangle$ ABC $= \frac{b^2}{2}$. sin.^{2} x $=$ $\frac{b^2}{2}$. sin.^{2} 45^0 $= \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (für den Radius 1, §. 14. Zus. 2.) $= \frac{b^2}{4}$

4) Da diese Formeln für den Radius 1 entworfen worden sind, so muß bey Berechnungen mit denselben darauf Rücksicht genommen werden (§. 35).

§. 52.

II. Der Flächeninhalt eines jeden rechtwinkligen Dreyeckes ist gleich dem Produkte aus dem halben Quadrate einer Kathete mit der Tangente des ihr anliegenden spitzen Winkels.

Beweis: (Fig. 11.)

Th.) $\triangle$ ABC $= \frac{a^2}{2}$. tg. y.

D.) $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ a c (Geom.). Nun ist c $=$ a . tg. y (für r $=$ 1 §. 42 Zus. 2), folglich $\triangle$ ABC $= \frac{a^2}{2}$. tg. y.

Zusätze:

1) Da tg. y $=$ cotg. x (§. 10), so ist auch $\triangle$ ABC $=$ $\frac{a^2}{2}$. cotg. x (Lehrs.); d. h. man erhält auch den Inhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes, wenn man das halbe Quadrat der einen Kathete mit der Cotangente des ihr gegenüberstehenden Winkels multiplizirt.

2) Der Analogie nach ist auch $\triangle ABC = \frac{c^2}{2} tg. x = \frac{c^2}{2} . cotg. y.$

3) Setzt man $x = y = 45°$, so wird $tg. x = cotg. y = tg. y = cotg. x = 1$ (dem Radius §. 16); und demnach $\triangle ABC = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2}$.

4) Diese Formeln gelten nur für den Radius 1, welches bey Berechnungen nicht ausser Acht gelassen werden darf (§. 35).

B.

In schiefwinklig-ebenen Dreyecken.

§. 53.

Lehrsätze.

I. Von einem jeden Dreyecke ist der Flächeninhalt gleich einem Bruche, dessen Zähler das Produkt aus dem Quadrate einer Seite mit dem Sinus der beyden anliegenden Winkel, und dessen Nenner der doppelte Sinus des gegenüberstehenden Winkels ist.

Beweis: (Fig. 12.)

$$\text{Th.)} \quad \triangle ABC = \frac{a^2 . \sin. \beta . \sin. \gamma}{2 . \sin. \alpha}.$$

D.) Man fälle die Höhenlinie AD, so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} a . AD$ (Geom.). Nun ist im $\triangle ABC$

$$a : c = \sin. \alpha : \sin. \gamma \text{ (§. 44)},$$

mithin $c = \frac{a . \sin. \gamma}{\sin. \alpha}$.

Ferners ist im $\triangle ABD$

$$c : AD = 1 : \sin. \beta \text{ (§. 40 Zus. 2)},$$

also $AD = c . \sin. \beta = \frac{a . \sin. \beta . \sin. \gamma}{\sin. \alpha}$,

und demnach endlich $\triangle ABC = \frac{a^2 . \sin. \beta . \sin. \gamma}{2 . \sin. \alpha}$.

Zusätze:

1) Auf demselben analytischen Wege erhält man auch

$$\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \sin. \alpha \cdot \sin. \gamma}{2 \cdot \sin. \beta}, \text{ und}$$

$$\triangle ABC = \frac{c^2 \cdot \sin. \alpha \cdot \sin. \beta}{2 \cdot \sin. \gamma}.$$

2) Wäre $\beta = \gamma$, so wird

$$\triangle ABC = \frac{a^2 \cdot \sin.^2 \beta}{2 \cdot \sin. \alpha} \text{ (Lehrs.), oder}$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{b^2}{2} \cdot \sin. \alpha \\ &= \frac{c^2}{2} \cdot \sin. \alpha \end{aligned}\right\} \text{(Zus. 1).}$$

3) Ist $\alpha = \beta = \gamma$, so wird

$\triangle ABC = \frac{a^2}{2} \cdot \sin. \beta$ (Lehrs.), und da $\sin. \beta = \sin. 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 14 Zus. 1), so ist $\triangle ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

4) Setzt man $\alpha = 90^\circ$, so wird $\sin. \alpha = 1$ (dem Radius §. 5 Zus. 1) und folglich aus der Formel des Lehrsatzes $\triangle ABC = \frac{a^2}{2} \cdot \sin. \beta \cdot \sin. \gamma$ (vergleiche §. 51) und aus den Formeln des ersten Zusatzes

$$\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \sin. \gamma}{2 \cdot \sin. \beta} = \frac{b^3 \cdot \sin. \gamma}{2 \cdot \cos. \gamma} \text{ (§. 6)}$$

$$= \frac{b^2}{2} \cdot \text{tg.}\, \gamma \text{ (§. 22 Zus. 3, vergl. damit §. 52),}$$

oder $$\triangle ABC = \frac{c^2 \cdot \sin. \beta}{2 \cdot \sin. \gamma} = \frac{c^2 \cdot \sin. \beta}{2 \cdot \cos. \beta} \text{ (§. 6)}$$

$= \frac{c^2}{2} \cdot \text{tg.}\, \beta$ (§. 22 Zus. 3. Vergleiche damit §. 52).

5) Diese Formeln gelten alle nur für den Radius 1, welches man bey Berechnungen wohl beachten muß (§. 35).

§. 54.

II. Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ist dem halben Produkte zweyer Seiten mit dem Sinus des, von ihnen eingeschlossenen, Winkels gleich.

Beweis: (Fig. 12).

Th.) $\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \cdot \sin. \beta$.

D.) Man ziehe die Höhenlinie AD, so ist

$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD$ (Geom.).

Nun ist im $\triangle ABD$

$c : AD = 1 : \sin. \beta$ (§. 40 Zus. 2).

also $AD = c \cdot \sin. \beta$, mithin

$\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \cdot \sin. \beta$.

Zusätze:

1) Der Analogie nach ist demnach auch

$\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \cdot \sin. \gamma$ und

$\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \cdot \sin. \alpha$.

2) Setzt man $a = c$, so wird aus der Formel des Lehrsatzes $\triangle ABC = \frac{a^2}{2} \cdot \sin. \beta$ (man vergleiche §. 53 Zus. 2).

3) Setzt man $\beta = 90°$, so entsteht aus der Formel des Lehrsatzes $\triangle ABC = \frac{1}{2} ac$ (Geom.), weil $\sin. \beta$ dann gleich 1 (dem Radius) ist (§. 5 Zus. 1).

4) Betrachtet man das $\triangle ABC$ als gleichseitig, so wird $a = b = c$ und $\sin. \beta = \sin. \gamma = \sin. \alpha = \sin. 60° = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ (§. 14 Zus. 1), und es verwandeln sich die Formeln in $\frac{a^2}{2} \cdot \sin. 60° = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ (man vergleiche §. 53 Zus. 3).

5) Diese Formeln wurden nur für den Radius 1 entworfen, worauf bey Berechnungen Rücksicht genommen werden muß (§. 35).

§. 55.

III. Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ist gleich dem vierten Theile der Quadratwurzel aus dem Produkte

von vier Faktoren, wovon der erste die Summe der drey Seiten, jeder der übrigen aber die Summe zweyer Seiten weniger der dritten ist.

Beweis: (Fig. 12.)

Th.) $\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}$.

D.) Nach §. 54 ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac \,.\, \sin.\beta$; nun ist

$$\sin.\beta = \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2ac}$$ (§. 49 Zus. 1), folglich

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}ac \,.\, \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}}{2ac}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\}}.$$

Zusätze:

1) Setzt man $b^2 = a^2 + c^2$, so wird

$$\sin.\beta = \frac{\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-)c)\}}}{2ac} = 1$$

(§. 49 Zus. 3); d. h. der Sinus von β ist dem Radius gleich, oder $\beta = 90^0$ (§. 6 Zus. 2), und die Formel verwandelt sich in $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac$ (Geom.).

2) Setzt man $a = b = c$, so erhält man

$\triangle ABC = \frac{1}{4} \,.\, \sqrt{3a^4} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (man vergleiche §. 53 Zus. 3).

3) Nimmt man $a + b + c = 2S$, mithin $S = \frac{a+b+c}{2}$ an, so wird $\triangle ABC$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{2S(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)\}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{2S(2S-2a)(2S-2b)(2S-2c)\}}$$

$$= \sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}}.$$

4) Daß diese Formeln für den Radius 1 entwickelt worden sind, darf bey Berechnungen nicht ausser Acht gelassen werden (§.35).

III. Hauptstück.

Die reine sphärische Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Berechnung der Seiten und Winkel in sphärischen Dreyecken.

A.

Vorkenntnisse.

§. 56.

Erklärungen.

Derjenige Theil einer Kugeloberfläche, welcher von drey Bögen größter Kugelkreise begränzt ist, wird ein sphärisches Dreyeck genannt (§. 42 Geometrie). Die begränzenden Kreisbögen heißen die Seiten und die sphärischen Winkel, welche zwey dieser Bögen mit einander machen, die Winkel des sphärischen Dreyeckes. Z. B. (Fig. 13) ist ABC ein sphärisches Dreyeck.

Die Größe eines sphärischen Winkels ist demnach jener des Neigungswinkels gleich, welchen die beyden größten Kugelkreise, wovon die Schenkel des Winkels Bögen sind, haben. So ist z. B. ADC der sphärische Winkel für die beyden Bögen AB und BC.

§. 57.

Da die zwey Bögen, welche einen sphärischen Winkel bilden, noch bevor sie das zweytemal zusammenstossen — welches nur in einer Entfernung von 180° statt finden kann — von einem dritten Bogen des größten Kugelkreises geschnitten werden können, um ein sphärisches Dreyeck zu bilden, so folgt daraus, daß eine jede Seite eines sphärischen Dreyeckes kleiner als 180° seyn kann; nur Dreyecke

dieser Art hat die sphärische Trigonometrie zu ihrem Gegenstande.

§. 58.

Ein sphärisches Dreyeck heißt **rechtwinklig**, wenn es einen oder mehrere rechte Winkel hat. Das Dreyeck ABC (Fig. 13) hat z. B. zwey rechte Winkel, nehmlich BCA und BAC, vorausgesetzt, daß die Neigungswinkel der Kreise BCE und BAF gegen ACFE rechte Winkel sind.

§. 59.

Wenn man bey einem sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 13) von den Winkelspitzen A, B und C nach dem Mittelpunkte D der dazu gehörigen Kugel die Radien AD, DB und CD zieht, so bilden die Seiten dieses Dreyeckes die Maase der drey geradlinigen Winkel ADB, ADC und CDB, welche den körperlichen Winkel bey D bilden. Es sind demnach die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes zusammen genommen allzeit kleiner als 360°; denn

$$ADB + ADC + CDB < 360^\circ \text{ (Stereometrie)},$$

mithin auch $AB + AC + BC < 360^\circ$.

Man bezeichnet in einem sphärischen Dreyecke die Winkel durch die, an den Ecken stehenden, großen Buchstaben, und die denselben gegenüberstehenden Seiten durch die gleichnamigen kleinen, wie selbes auch bereits in der ebenen Trigonometrie befolgt wurde.

B.

Rechtwinklig-sphärische Dreyecke.

§. 60.

Lehrsätze.

I. In jedem sphärischen Dreyecke mit **einem** rechten Winkel verhält sich der Sinus einer Kathete zum Sinus

des gegenüberstehenden Winkels wie der Sinus der Hypothenuse zum Radius.

Beweis: (Fig. 14)

Th.) sin. b : sin. B = sin. c : r.

D.) ACB = R. Man ziehe die Radien AD, BD und CD, so wie von A aus auf CD die Senkrechte AE, so steht AE auch senkrecht auf der Ebene BCD, weil ACFG senkrecht auf CBG (vermöge Voraussetzung). Ferners ziehe man von E aus EH senkrecht auf DB, so ist die gezogene AH ebenfalls senkrecht auf DB, und AHE der Neigungswinkel der größten Kugelkreise ABI und GBC, nehmlich gleich dem sphärischen Winkel bey B (§. 56). Eben so ist auch AEH = R = C.

In dem ebenen rechtwinkligen Dreyecke AEH ist

AE : AH = sin. AHE : r (§. 40) oder

sin. ADC : sin. ADB = sin. B : r oder

sin. b : sin. c = sin. B : r oder

sin. b : sin. B = sin. c : r.

Zusätze:

1) Aus dieser Proportion entstehen nun folgende Formeln:

$$\sin. b = \frac{\sin. B \,.\, \sin. c}{r}$$

$$\sin. B = \frac{r. \sin. b}{\sin. c}$$

und $$\sin. c = \frac{r. \sin. b}{\sin. B}.$$

2) Auf dieselbe Art läßt sich auch beweisen, daß

sin. a : sin. A = sin. c : r.

3) Setzt man in dem Dreyecke ABC auch B = 90°, so ist sin. B = r (§. 5), also sin. b = sin. c und b = c; d. h. wenn ein sphärisches Dreyeck zwey rechte Winkel hat, so sind die denselben gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

§. 61.

II. In jedem sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel ist für den Radius 1 der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Produkte aus dem Cosinus der beyden Katheten.

Beweis: (Fig. 14.)

Th.) $\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b.$

D.) $ACB = R$. Man ziehe die Radien AD, BD und CD, dann von A aus AE senkrecht auf CD, so ist auch AE senkrecht auf BCD (Geom.). Ferners ziehe man von E aus EH senkrecht auf BD, so ist, wenn man AH zieht, auch diese Linie senkrecht auf BD (Geom.).

In dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke AEH ist

$AH^2 = AE^2 + HE^2$ oder

$\sin.^2 c = \sin.^2 b + HE^2.$

Nun ist in dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke DHE

$HE : DE = \sin. CDB : 1$ (§. 40 Zus. 2) oder

$HE : \cos. b = \sin. a : 1$, woraus

$HE = \cos. b \,.\, \sin. a$ und

$HE^2 = \cos.^2 b \,.\, \sin. ^2a$ ist.

Folglich ist $\sin. ^2c = \sin. ^2b + \cos. ^2b \,.\, \sin. ^2a$ oder $1 - \cos. ^2c = 1 - \cos. ^2b + \cos. ^2b - \cos. ^2a \,.\, \cos. b$ (§. 19 Zus. 3), woraus

$- \cos. ^2c = - \cos. ^2a \,.\, \cos. ^2b$ oder

$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b$ folgt.

Zusätze:

1) Aus dieser Formel folgt:

$\cos. a = \frac{\cos. c}{\cos. b}$ und $\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$; d. h. in jedem sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel ist der Cosinus einer Kathete dem Quotienten aus dem Cosinus der andern Kathete in den Cosinus der Hypothenuse gleich.

2) Sind die beyden Katheten gleichartig, so ist die Hypothenuse $< 90°$, und sind erstere ungleichartig, so ist

letztere $> 90°$; sind in der Formel des Lehrsatzes sowohl a, als auch b $< 90°$, so sind ihre Cosinus, also auch cos. c positiv, und folglich c $< 90°$; eben so ist es auch, wenn beyde Katheten $> 90°$, also ihre Cosinus negativ sind; ist aber von a und b eines $> 90°$ und das andere $< 90°$, so ist von ersterm der Cosinus negativ und von letzterm positiv, also cos. c negativ, folglich c $> 90°$.

3) Ist a $= 90°$ und b $= 90°$, so wird cos. c $= 0$, d. h. auch c $= 90°$.

4) Die entwickelten Formeln gelten nur für den Radius 1, welches bey Berechnungen nicht ausser Acht zu lassen ist (§. 35).

§. 62.

III. In einem jeden sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel ist für den Radius 1 die Tangente einer Kathete gleich dem Produkte aus der Tangente des gegenüberstehenden Winkels mit dem Sinus der andern Kathete.

Beweis: (Fig. 14)

Th.) $\text{tg. } b = \text{tg. } B \,.\, \text{sin. } a$.

D.) ACB $=$ R. In dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke AED ist $AE : DE = \text{tg. } ADE : 1$ (§. 42 Zus. 2), also $AE = DE \,.\, \text{tg. } ADE$; und in dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke AEH ist $AE : HE = \text{tg. } AHE : 1$ (§. 42 Zus. 2), und daraus $AE = HE \,.\, \text{tg. } AHE$.

Folglich $DE \,.\, \text{tg. } ADE = HE \,.\, \text{tg. } AHE$ oder

$$\text{cos. } b \,.\, \text{tg. } b = HE \,.\, \text{tg. } B, \text{ woraus}$$

$$\text{tg. } b = \frac{HE \,.\, \text{tg. } B}{\text{cos. } b}.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreyecke DHE für $r = 1$, $HE = DE \,.\, \text{sin. } a$ (§. 40 Zus. 3) oder $HE = \text{cos. } b \,.\, \text{sin. } a$.

Substituirt man diesen Werth, so erhält man

$$\text{tg. } b = \frac{\text{cos. } b \,.\, \text{sin. } a \,.\, \text{tg. } B}{\text{cos. } b}.$$

oder $\text{tg. } b = \text{tg. } B \,.\, \text{sin. } a$.

Zusätze:

1) Analog mit dieser Formel ist auch $tg.\, a = tg.\, A \,.\, sin.\, b$.

2) In einem rechtwinklig-sphärischen Dreyecke sind die Katheten mit den ihnen gegenüberstehenden Winkeln gleichartig; weil in diesen beyden Formeln sin. a oder sin. b immer positiv bleibt, und der positive oder negative Werth von tg. a oder tg. b von jenem von tg. A oder tg. B abhängt.

3) Ist auch $B = 90°$, so wird $tg.\, B = \infty$, und nach der Formel des Lehrsatzes $tg.\, b = \infty \,.\, sin.\, a = \infty$; d. h. $b = 90°$.

4) Dasselbe folgt auch für a, wenn man den Winkel $A = 90°$ setzt. Es ist demnach in einem sphärischen Dreyecke mit zwey rechten Winkeln jede der, denselben gegenüberstehenden Seiten gleich 90°, und in einem sphärischen Dreyecke mit drey rechten Winkeln jede Seite ein Quadrant (Zus. 2).

5) Aus der Formel des Lehrsatzes folgt, daß

$sin.\, a = \frac{tg.\, b}{tg.\, B}$ und $tg.\, B = \frac{tg.\, b}{sin.\, a}$ ist.

6) Da $tg.\, B = \frac{1}{cotg.\, B}$ und $tg.\, b = \frac{1}{cotg.\, b}$ ist (§. 23 Zus. 4), so erhält man aus Zusatz 5,

$$\frac{1}{cotg.\, B} = \frac{1}{sin.\, a \,.\, cotg.\, b} \text{ oder}$$

$$cotg.\, B = sin.\, a \,.\, cotg.\, b.$$

7) Diese Formeln gelten nur für den Radius 1, welches bey Berechnungen stets zu berücksichtigen ist (§. 35).

§. 63.

IV. In jedem sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel ist die Tangente einer Kathete gleich dem Produkte aus der Tangente der Hypothenuse mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis: (Fig. 14.)

Th.) $tg.\ a = tg.\ c\ .\ cos.\ B.$

D.) $ACB = R.$ In dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke AHD ist $AH : DH = tg.\ ADH : 1$ (§. 42 Zus. 2), also $AH = DH\ .\ tg.\ ADH$; und in dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke AEH ist $AH : HE = 1 : cos.\ AHE$ (§. 41 Zus. 2), woraus $AH = \frac{AE}{cos.\ AHE}$.

Mithin ist $DH\ .\ tg.\ ADH = \frac{HE}{cos.\ AHE}$

oder $cos.\ c\ .\ tg.\ c = \frac{HE}{cos.\ B}$.

Nun ist in dem rechtwinklig-ebenen Dreyecke DHE

$$HE : DH = tg.\ EDH : 1$$

(§. 42 Zus. 2), woraus $HE = DH\ .\ tg.\ EDH$

$$= cos.\ c\ .\ tg.\ a;$$

folglich ist $cos.\ c\ .\ tg.\ c = \frac{cos.\ c\ .\ tg.\ a}{cos.\ B}$

$$tg.\ c = \frac{tg.\ a}{cos.\ B}$$

und endlich $tg.\ a = tg.\ c\ .\ cos.\ B.$

Zusätze:

1) Der Analogie nach ist auch $tg.\ b = tg.\ c\ .\ cos.\ A.$

2) Aus der Formel des Lehrsatzes und aus §. 62 Zusatz 1 folgt $tg.\ A\ .\ sin.\ b = tg.\ c\ .\ cos.\ B$, woraus

$sin.\ b : cos.\ B = tg.\ c : tg.\ A$ ist; d. h. der Sinus einer Kathete verhält sich zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels, als wie die Tangente der Hypothenuse zur Tangente des andern anliegenden Winkels.

3) Aus dieser Proportion bilden sich folgende vier Gleichungen: $sin.\ b = \frac{cos.\ B\ .\ tg.\ c}{tg.\ A}$,

$$tg.\ c = \frac{sin.\ b\ .\ tg.\ A}{cos.\ B},$$

$$\cos. B = \frac{\sin. b \, . \, tg. A}{tg. c} \text{ und}$$

$$tg. A = \frac{\cos. B \, . \, tg. c}{\sin. b}.$$

4) Diese Formeln sind alle für den Radius 1 entworfen worden, welches bey Berechnungen nie vergessen werden darf (§. 35).

§. 64.

V. In jedem sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel ist der Cosinus eines an der Hypothenuse liegenden Winkels gleich dem Produkte aus dem Cosinus der gegenüberstehenden Kathete mit dem Sinus des andern anliegenden Winkels.

Beweis: (Fig. 14.)

Th.) $\cos. B = \cos. b \, . \, \sin. A.$

D.) $ACB = R$. Fällt man von $CDB = a$ den Sinus CF, so ist

$$CF : HE = CD : DE \text{ oder}$$

$$\sin. a : HE = 1 : \cos. b.$$

Nun ist $HE = AH \, . \, \cos. AHE = \sin. c \, . \, \cos. B.$

Mithin entsteht aus obiger Proportion

$$\sin. a : \sin. c \, . \, \cos. B = 1 : \cos. b.$$

Es ist aber $\sin. a = \sin. c \, . \, \sin. A$ (§. 60 Zus. 2), folglich $\sin. c \, . \, \sin. A : \sin. c \, . \, \cos. B = 1 : \cos. b$ oder

$$\sin. A : \cos. B = 1 : \cos. b, \text{ woraus}$$

$$\cos. B = \cos. b \, . \, \sin. A.$$

Zusätze:

1) Analog hiermit ist $\text{sos}. A = \cos. a \, . \, \sin. B.$

2) Aus der Formel des Lehrsatzes folgt, daß

$$\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. A} \text{ und}$$

$$\sin. A = \frac{\cos. B}{\cos. b}.$$

3) Setzt man auch $A = B = C = 90°$, so ist aus der Formel des Lehrsatzes $\cos. b = \frac{0}{1} = 0$; d. h. $b = 90°$; und aus der Formel des 1. Zusatzes ist $\cos. a = \frac{0}{1} = 0$; d. h. auch $a = 90°$. Es ist demnach in einem jeden sphärischen Dreyecke mit drey rechten Winkeln jede der Seiten ein Quadrant (vergleiche §. 62 Zus. 4).

4) Diese Formeln sind für den Radius 1 entwickelt worden, welches bey Berechnungen immer berücksichtiget werden muß (§. 35).

§. 65.

VI. In einem jeden sphärischen Dreyecke mit **einem** rechten Winkel ist die Cotangente eines an der Hypothenuse liegenden Winkels gleich dem Produkte aus dem Cosinus der Hypothenuse mit der Tangente des andern anliegenden Winkels.

Beweis: (Fig. 14.)

Th.) $\cot g. B = \cos. c \,.\, tg. A.$

D.) $ACB = R.$ Aus §. 63 Zus. 3 ist

$$\cos. B = \frac{\sin. b \,.\, tg. A}{tg. c}.$$

Es ist aber $\sin. b = \sin. B \,.\, \sin. c$ (§. 60 Zus. 1),

$$\text{also } \cos. B = \frac{\sin. B \,.\, \sin. c \,.\, tg. A}{tg. c} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos. B}{\sin. B} = \frac{\sin. c}{tg. c} \,.\, tg. A.$$

Ferners ist $\frac{\cos. B}{\sin. B} = \cot g. B$ (§. 23 Zus. 3) und

$$\frac{\sin. c}{tg. c} = \cos. c \text{ (§. 22 Zus. 3)},$$

mithin $\cot g. B = \cos. c \,.\, tg. A.$

Zusätze:

1) Analog mit dieser Formel ist

$$\cot g. A = \cos. c \,.\, tg. B.$$

2) Aus der Formel der Lehrsatzes ist

$$\cos. c = \frac{\text{cotg. } B}{\text{tg. } A} \text{ und}$$

$$\text{tg. } A = \frac{\text{cotg. } B}{\cos. c}.$$

3) Setzt man $A = B = C = 90^\circ$, so ist $\text{tg. } A = \infty$ und $\text{cotg. } B = 0$, und es wird $\cos. c = \frac{0}{\infty} = 0$; d. h. $c = 90^\circ$ (§. 64 Zus. 3).

4) Da $\text{tg. } A = \frac{1}{\text{cotg. } A}$ (§. 23 Zus. 4), so ist

$$\cos. c = \text{cotg. } A \,.\, \text{cotg. } B \text{ (Zus. 2), und}$$

$$\text{cotg. } A = \frac{\cos. c}{\text{cotg. } B} \text{ oder } \text{cotg. } B = \frac{\cos. c}{\text{cotg. } A}.$$

5) Daß diese Formeln für den Radius 1 entworfen wurden, darf bey Berechnungen nicht ausser Acht gelassen werden (§. 35).

§. 66.

VII. In einem jeden sphärischen Dreyecke mit einem rechten Winkel erhält man den Cosinus eines an der Hypothenuse liegenden Winkels, wenn man die Tangente der ihm anliegenden Kathete durch die Tangente der Hypothenuse dividirt.

Beweis: (Fig. 14.)

Th.) $\cos. B = \frac{\text{tg. } a}{\text{tg. } c}$.

D.) $ACB = R$. Aus §. 63 Zus. 3 ist

$$\cos. B = \frac{\sin. b \,.\, \text{tg. } A}{\text{tg. } c}. \text{ Da nun}$$

$$\sin. b = \frac{\text{tg. } a}{\text{tg. } A} \text{ (§. 62 Zus. 1), so ist}$$

$$\cos. B = \frac{\text{tg. } a}{\text{tg. } c}.$$

Oder es ist gleich unmittelbar aus §. 63

$$\cos. B = \frac{\text{tg. } a}{\text{tg. } c}.$$

Zusätze:

1) Analog mit dieser Formel ist

$$\cos. A = \frac{tg.\ b}{tg.\ c}.$$

2) Aus der Formel des Lehrsatzes ist

$$tg.\ a = \cos. B\ .\ tg.\ c \text{ und}$$

$$tg.\ c = \frac{tg.\ a}{\cos. B}.$$

3) Da $\frac{1}{tg.\ c} = cotg.\ c$ (§. 23 Zus. 4), so wird aus der Formel des Lehrsatzes $\cos. B = tg.\ a\ .\ cotg.\ c$, woraus $cotg.\ c = \frac{\cos. B}{tg.\ a}$ oder weil $tg.\ a = \frac{1}{cotg.\ a}$ (§. 23 Zus. 4), so ist auch $cotg.\ c = \cos. B\ .\ cotg.\ a$.

4) Daß diese Formeln für den Radius 1 entworfen sind, darf bey Berechnungen nicht unberücksichtigt bleiben (§. 35).

C.

Schiefwinklig-sphärische Dreyecke.

§. 67.

Lehrsätze.

I. In einem jeden schiefwinklig-sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinus zweyer Seiten, wie die Sinus ihrer gegenüberstehenden Winkel.

Beweis: (Fig. 15 und 16.)

Th.) $\sin. a : \sin. c = \sin. A : \sin. C$.

D.) Man lege auf den größten Kugelkreis, von welchem b ein Bogen ist, einen andern, welcher durch B geht, senkrecht, so, daß $BD = h$ auch senkrecht auf b steht. Es sind demnach die Dreyecke ADB und CDB rechtwinklig, und daher für $r = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\sin. h : \sin. A = \sin. c : 1 \\ \sin. h : \sin. C = \sin. a : 1\end{array}\right\} (\text{§. } 60),$$

mithin $\sin. A : \sin. C = \sin. a : \sin. c$ (Arithm.)
oder $\sin. a : \sin. c = \sin. A : \sin. C$ *).

Zusätze:

1) Analog mit dieser Proportion ist:
$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B$ und
$\sin. b : \sin. c = \sin. B : \sin. C$.

2) Aus der Proportion des Lehrsatzes folgen die Formeln:

$$\sin. a = \frac{\sin. c \,.\, \sin. A}{\sin. C},$$

$$\sin. c = \frac{\sin. a \,.\, \sin. C}{\sin. A},$$

$$\sin. A = \frac{\sin. a \,.\, \sin. C}{\sin. c} \text{ und}$$

$$\sin. C = \frac{\sin. c \,.\, \sin. A}{\sin. a}.$$

3) Es ist die zu suchende Seite $a < 90°$, wenn $c < 90°$ und $C > A$ ist (Zus. 2); denn der kleinern Seite steht auch der kleinere Winkel gegenüber; so wie auch dann $a < 90°$ ist, wenn $A < 90°$, $c > 90°$ und $C < (180° - A)$ ist.

4) Es ist die zu suchende Seite $a > 90°$, wenn $c > 90°$ und $C < A$ (Zus. 2), oder wenn $A > 90°$, $c < 90°$ und $C > (180° - A)$ ist. Dieselbe Bewandtniß hat es mit jeder Seite in dem Dreyecke ABC durch die besagten Stücke ausgedrückt.

5) Es wird der zu suchende Winkel $A < 90°$, wenn $C < 90°$ und $c > a$, oder wenn $C > 90°$, $a < 90°$ und $c < (180° - a)$ ist. Hingegen wird $A > 90°$, wenn $C > 90°$ und $c < a$, oder wenn $C < 90°$, $a > 90°$

---

*) Diese Formel, so wie alle folgenden sind für den Radius 1 entworfen, welches bey Berechnungen nicht vergessen werden darf (§. 55).

und $c > (180^\circ - a)$ ist. Eben so verhält es sich auch mit jedem der Winkel im Dreyecke ABC, durch die erwähnten Stücke ausgedrückt.

6) In allen übrigen Fällen, in welchen diese Merkmahle nicht vorausgesetzt sind, ist die Auflösung nach diesen Formeln unbestimmt, weil Supplementswinkel gleiche Sinus haben, und man also zwey Dreyecke erhielte, wo in einem das gesuchte Stück > und im andern $< 90^\circ$ wäre. Welches von diesen beyden dann das rechte ist, muß sich aus andern Umständen bestimmen.

§. 68.

II. In einem jeden schiefwinklig-sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 17) ist, wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die dritte Seite

$$\cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A,$$
$$\cos. b = \cos. a \,.\, \cos. c + \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B,$$
$$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C.$$

Beweis: (Fig. 17).

D.) Man ziehe den Perpendikel BD, so ist

$$\text{tg. AD} = \text{tg. c} \,.\, \cos. A \text{ (§. 63)} = \frac{\sin. c \,.\, \cos. A}{\cos. c} \text{ (§. 22}$$

Zus. 3).

Ferners ist $\cos. CD = \frac{\cos. a}{\cos. h}$ (§. 61 Zus. 1)

$$= \frac{\cos. a \,.\, \cos. AD}{\cos. c} \text{ (§. 61 Zus. 1) oder}$$

$$\cos. (b - AD) = \frac{\cos. a \,.\, \cos AD}{\cos. c} \text{ oder}$$

$$\cos. b \,.\, \cos. AD + \sin. b \,.\, \sin. AD = \frac{\cos. a \,.\, \cos. AD}{\cos. c}$$

(§. 27 Zus. 8), woraus, wenn man alle Glieder durch cos. AD dividirt, folgt:

$$\cos. b + \sin. b \,.\, \frac{\sin. AD}{\cos. AD} = \frac{\cos. a}{\cos. c} \text{ oder}$$

$$\sin. b \,.\, tg.\, AD = \frac{\cos. a}{\cos. c} - \cos. b$$

$$= \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\cos. c}$$

$$\text{und } tg.\, AD = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \cos. c}.$$

Substituirt man für tg. AD den oben gefundenen Werth, so erhält man

$$\frac{\sin. c \,.\, \cos. A}{\cos. c} = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \cos. c}$$

$$\sin. c \,.\, \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b}$$

$\sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A = \cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c$ und endlich $\cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A.$

Analog mit dieser Formel ist

$\cos. b = \cos. a \,.\, \cos. c + \sin. a \,.\, \sin. c \,.\, \cos. B$ und
$\cos. c = \cos. a \,.\, \cos. b + \sin. a \,.\, \sin. b \,.\, \cos. C.$

Zusätze:

1) Aus diesen drey Formeln folgt:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \,.\, \cos. c}{\sin. b \,.\, \sin. c},$$

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \,.\, \cos. c}{\sin. a \,.\, \sin. c} \text{ und}$$

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \,.\, \cos. b}{\sin. a \,.\, \sin. b}.$$

2) Um diese Formeln durch Logarithmen auflösen zu können, verwandle man sie folgendermassen:

Da $\cos. a = \cos. b \,.\, \cos. c + \sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A$,

$$\text{so ist auch } \frac{\cos. a}{\cos. c} = \cos. b + \frac{\sin. b \,.\, \sin. c \,.\, \cos. A}{\cos. c}$$

$$= \cos. b + \sin. b \,.\, tg.\, c \,.\, \cos. A.$$

Nun setze man $tg.\, c \,.\, \cos. A = tg.\, \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$, so wird

$$\frac{\cos. a}{\cos. c} = \cos. b + \frac{\sin. b \,.\, \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \frac{\cos. b . \cos. \varphi + \sin. b . \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$$

und $\cos. a = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} . \cos. b . \cos. \varphi + \sin. b. \sin. \varphi$

$= \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} . \cos. (b - \varphi)$ (§. 27 Zus. 8).

Aus Zusatz 1 ist $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b . \cos. c}{\sin. b . \sin. c}$,

also $\cos. A . \sin. b . \sin. c = \cos. a - \cos. b . \cos. c$

$\frac{\cos. A . \sin. b . \sin. c}{\sin. a} = \frac{\cos. a}{\sin. a} - \frac{\cos. b . \cos. c}{\sin. a}$

Setzt man $\frac{\cos. b . \cos. c}{\sin. a} = \text{tg}. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$, so ist

$\frac{\cos. A . \sin. b . \sin. c}{\sin. a} = \frac{\cos. a}{\sin. a} - \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$

$= \frac{\cos. a . \cos. \varphi - \sin. a . \sin. \varphi}{\sin. a . \cos. \varphi}$

$\cos. A . \sin. b . \sin. c = \frac{\cos. (a + \varphi)}{\cos. \varphi}$ (§. 27) und

endlich $\cos. A = \frac{\cos. (a + \varphi)}{\sin. b . \sin. c . \cos. \varphi}$.

Um nach diesen Formeln die Seiten und Winkel zu berechnen, muß man zuvor die Größe von φ suchen, welche sich für die Seiten aus $\text{tg}. \varphi = \text{tg}. c . \cos. A$ und für die Winkel aus $\text{tg}. \varphi = \frac{\cos. b . \cos c}{\sin. a}$ leicht bestimmen läßt.

§. 69.

III. In einem jeden schiefwinklich-sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 17) kann, wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, jeder der andern zwey Winkel durch folgende Gleichungen gefunden werden:

$\text{cotg}. A = \frac{\text{cotg}. a . \sin. b - \cos. C . \cos. b}{\sin. C}$,

$\text{cotg}. B = \frac{\text{cotg}. b . \sin. a - \cos. C . \cos. a}{\sin. C}$.

Beweis: (Fig. 17).

D.) Man substituire in die Gleichung für cos. a jenen für cos. c (§. 68), so ist:

$$\cos.a = \cos.a.\cos.^2 b + \sin.a.\sin.b.\cos.b.\cos.C + \sin.b.\sin.c.\cos.A$$
$$= \cos.a(1 - \sin.^2 b) + \sin.a.\sin.b.\cos.b.\cos.C + \sin.b.\sin.c.\cos.A$$
$$= \cos.a - \cos.a.\sin.^2 b + \sin.a.\sin.b.\cos.b.\cos.C + \sin.b.\sin.c.\cos.A$$
$$0 = \sin.a.\sin.b.\cos.b.\cos.C + \sin.b.\sin.c.\cos.A - \cos.a.\sin.^2 b.$$
$$= \cos.b.\cos.C + \frac{\sin.c.\cos.A}{\sin.a} - \operatorname{cotg}.a.\sin.b.$$

Weil nun sin. a : sin. c = sin. A : sin. C (§. 67), also

$$\sin.c = \frac{\sin.a.\sin.C}{\sin.A},$$ so ist

$$0 = \cos.b.\cos.C + \frac{\cos.A.\sin.C}{\sin.A} - \operatorname{cotg}.a.\sin.b,$$
$$= \cos.b.\cos.C + \operatorname{cotg}.A.\sin.C - \operatorname{cotg}.a.\sin.b,$$

woraus endlich:

$$\operatorname{cotg}.A = \frac{\operatorname{cotg}.a.\sin.b - \cos.C.\cos.b}{\sin.C}$$ und

der Analogie nach auch

$$\operatorname{cotg}.B = \frac{\operatorname{cotg}.b.\sin.a - \cos.C.\cos.a}{\sin.C}$$ folgt.

Zusätze:

1) Aus diesen beyden Gleichungen folgt zur Bestimmung einer der Seiten, wenn zwey Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind:

$$\operatorname{cotg}.a = \frac{\operatorname{cotg}.A.\sin.C + \cos.C.\cos.b}{\sin.b}$$ und

$$\operatorname{cotg}.b = \frac{\operatorname{cotg}.B.\sin.C + \cos.C.\cos.a}{\sin.a}.$$

2) Um nach diesen Formeln mit Logarithmen rechnen zu können, nehme man mit ihnen folgende Verwandlungen vor:

$$\operatorname{cotg}.A = \frac{\operatorname{cotg}.a.\sin.b - \cos.C.\cos.b}{\sin.C},$$

also auch $\frac{1}{tg.\ A} = \frac{sin.\ b}{tg.\ a\ .\ sin.\ C} - cotg.\ C\ .\ cos.\ b,$

$\frac{tg.\ a\ .\ sin.\ C}{tg.\ A} = sin.\ b - tg.\ a\ .\ sin.\ C\ .\ cotg.\ C\ .\ cos.\ b,$

und weil $cotg.\ C = \frac{cos.\ C}{sin.\ C},$

$\frac{tg.\ a\ .\ sin.\ C}{tg.\ A} = sin.\ b - tg.\ a\ .\ cos.\ C\ .\ cos.\ b.$ Setzt man

$cos.\ C\ .\ tg.\ a = cotg.\ \varphi = \frac{cos.\ \varphi}{sin.\ \varphi},$ so ist

$\frac{tg.\ a\ sin.\ C}{tg.\ A} = sin.\ b - \frac{cos.\ b\ .\ cos.\ \varphi}{sin.\ \varphi} =$

$\frac{sin.\ b\ .\ sin.\ \varphi - cos.\ b\ .\ cos.\ \varphi}{sin.\ \varphi} = - \frac{cos.\ (b + \varphi)}{sin.\ \varphi},$

und $tg.\ a\ .\ sin.\ C = - \frac{tg.\ A\ .\ cos.\ (b + \varphi)}{sin.\ \varphi}$, woraus

$tg.\ A = - \frac{tg.\ a\ .\ sin.\ C\ .\ sin.\ \varphi}{cos.\ (b + \varphi)}$ oder

$cotg.\ A = - \frac{cotg.\ a\ .\ cos.\ (b + \varphi)}{sin.\ C\ .\ sin.\ \varphi}.$

Um auch $cotg.\ a = \frac{cotg.\ A\ .\ sin.\ C + cos.\ C\ .\ cos.\ b}{sin.\ b}$ (Zus. 1) auf diese Art zu verwandeln, sage man, diese Gleichung ist einerley mit

$cotg.\ a = \frac{cotg.\ A\ .\ sin.\ C}{sin.\ b} + cos.\ C\ .\ cotg.\ b,$ oder

$\frac{1}{tg.\ a} = \frac{sin.\ C}{tg.\ A\ .\ sin.\ b} + cos.\ C\ .\ cotg.\ b,$

$\frac{tg.\ A\ .\ sin.\ b}{tg.\ a} = sin.\ C + tg.\ A\ .\ cos.\ C\ .\ sin.\ b\ .\ cotg.\ b,$

und da $cotg.\ b = \frac{cos.\ b}{sin.\ b},$

$\frac{tg.\ A\ .\ sin.\ b}{tg.\ a} = sin.\ C + tg.\ A\ .\ cos.\ C\ .\ cos.\ b.$

Setzt man $\cos. b \,.\, tg. A = tg. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$, so ist

$$\frac{tg. A \,.\, \sin. b}{tg. a} = \sin. C + \frac{\cos. C \,.\, \sin. \varphi}{\cos. \varphi} =$$

$$= \frac{\sin. C \,.\, \cos. \varphi + \cos. C \,.\, \sin. \varphi}{\cos. \varphi} =$$

$$= \frac{\sin. (C + \varphi)}{\cos. \varphi}, \text{ woraus}$$

$$tg. a = \frac{tg. A \,.\, \sin. b \,.\, \cos. \varphi}{\sin. (C + \varphi)} \text{ oder}$$

$$\cot g. a = \frac{\cot g. A \,.\, \sin. (C + \varphi)}{\sin. b \,.\, \cos. \varphi}.$$

Wenn man demnach für erstere Gleichung aus $\cot g. \varphi = \cos. C \,.\, tg. a$ und für letztere aus $tg. \varphi = \cos. b \,.\, tg. A$ den Hülfswinkel φ berechnet hat, so läßt sich A und a leicht finden.

§. 70.

IV. In jedem schiefwinklig-sphärischen Dreyecke ABC (Fig. 17) findet man, wenn zwey Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind, den dritten Winkel durch die Gleichungen:

$$\cos. A = \cos. a \,.\, \sin. B \,.\, \sin. C - \cos. B \,.\, \cos. C,$$
$$\cos. B = \cos. b \,.\, \sin. A \,.\, \sin. C - \cos. A \,.\, \cos. C,$$
$$\cos. C = \cos. c \,.\, \sin. A \,.\, \sin. B - \cos. A \,.\, \cos. B.$$

Beweis: (Fig. 17.)

D.) Nach §. 69 ist $\cot g. A = \frac{\cot g. a \,.\, \sin. b - \cos. C \,.\, \cos. b}{\sin. C}$

oder $\cot g. A \,.\, \sin. C = \cot g. a \,.\, \sin. b - \cos. C \,.\, \cos. b.$

Nun ist $\sin. b = \frac{\sin. B \,.\, \sin. a}{\sin. A}$ (§. 67) und

$\cot g. a = \frac{\cos. a}{\sin. a}$ (§. 22 Zus. 3), also

$$\cot g. A \,.\, \sin. C = \frac{\cos. a \,.\, \sin. B}{\sin. A} - \cos. C \,.\, \cos. b,$$

cotg. A . sin. A . sin. C = cos. a . sin. B — sin. A . cos. C . cos. B.

Weil auch cotg. A $= \frac{\cos. A}{\sin. A}$ ist (§. 22 Zus. 3), so ist

cos. A . sin. C = cos. a . sin. B — sin. A . cos. C . cos. b.

Mit dieser Gleichung analog ist

cos. B . sin. C = cos. b . sin. A — sin. B . cos. C . cos. a.

Multiplizirt man letztere Gleichung mit cos. C, addirt hierauf beyde Gleichungen, setzt dann statt cos. ^{2}C nach §. 19 Zus. 2, 1 — sin. ^{2}C und dividirt alle Glieder durch sin. C, so erhält man

cos. A = cos. a . sin. B . sin. C — cos. B . cos. C, womit
cos. B = cos. b . sin. A . sin. C — cos. A . cos. C, und
cos. C = cos. c . sin. A . sin. B — cos. A . cos. B analog ist.

Zusätze:

1) Aus diesen Gleichungen folgt zur Bestimmung einer der Seiten, wenn die drey Winkel gegeben sind:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C},$$

$$\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A \,.\, \cos. C}{\sin. A \,.\, \sin. C} \text{ und}$$

$$\cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A \,.\, \cos. B}{\sin. A \,.\, \sin. B}.$$

2) Um diese Gleichungen logarithmisch auflösen zu können, sage man

cos. A = cos. a . sin. B . sin. C — cos. B . cos. C

ist einerley mit

$\frac{\cos. A}{\cos. B} = \cos. a \,.\, \text{tg}. B \,.\, \sin. C - \cos. C.$ Setzt man cos. a . tg. B $= \text{tg}. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi}$, so ist

$$\frac{\cos. A}{\cos. B} = \frac{\sin. \varphi \,.\, \sin. C - \cos. \varphi \,.\, \cos. C}{\cos. \varphi}$$

$$= -\frac{\cos. (C + \varphi)}{\cos. \varphi} \text{ und}$$

$\cos. A = - \frac{\cos. B \,.\, \cos. (C + \varphi)}{\cos. \varphi}$. Berechnet man aus $\cos. a \,.\, tg. B = tg. \varphi$ den Winkel φ, so läßt sich A leicht finden. In dem ersten Zusatze ist

$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C}$, folglich auch

$1 + \cos. a = 1 + \frac{\cos. A + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C}$ oder

$1 + \cos. a = \frac{\cos. A + \sin. B \,.\, \sin. C + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C}$.

Nun folgt aus §. 27 Zus. 6, daß $1 + \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$,

mithin $2 \cos.^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos. A + \sin. B \,.\, \sin. C + \cos. B \,.\, \cos. C}{\sin. B \,.\, \sin. C}$,

$= \frac{\cos. A + \cos. (B - C)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$ (§. 27 Zus. 8).

Nach §. 32, 3tens ist aber

$\cos. A + \cos. (B - C) = 2. \cos. \frac{1}{2}(A + B - C) \cos. \frac{1}{2}(A + C - B)$,

mithin

$$2. \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{2. \cos. \frac{1}{2} (A + B - C) \cos. \frac{1}{2} (A + C - B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B + C - 2C) \cos. \frac{1}{2} (A + B + C - 2B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}.$$

Setzt man $A + B + C = 2S$, also $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$, so erhält man

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos. \frac{1}{2} (2S - 2C) \,.\, \cos. \frac{1}{2} (2S - 2B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$

$$= \frac{\cos. (S - C) \,.\, \cos. (S - B)}{\sin. B \,.\, \sin. C}$$ und

endlich $\cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{\left[\frac{\cos. (S - B) \,.\, \cos. (S - C)}{\sin. B \,.\, \sin. C}\right]}$.

II. Abschnitt.

Berechnung der Flächeninhalte in sphärischen Dreyecken.

§. 71.

Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines jeden sphärischen Dreyeckes ist gleich dem Produkte aus dem Radius der Kugel, zu welcher das Dreyeck gehört mit dem Längenmaaße desjenigen Bogens des größten Kugelkreises, welcher so viele Grade hat, als der Ueberschuß der Summe der drey Winkel des Dreyeckes über 180° beträgt; nemlich:

$$\triangle ABC = r \times \frac{(A + B + C - 180^\circ)\, 2 r \pi}{360^\circ}$$ (§. 115 Zus. 2, Geom.) $$= \frac{r^2 \pi}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ).$$

Beweis: (Fig. 18.)

ABC sey das betreffende Dreyeck. Man verlängere auf der Oberfläche der Kugel jede der Seiten des Dreyeckes, so, daß die drey größten Kugelkreise ABDE, ACFG und BCHI entstehen, so sind BL, AN und CK die Durchschnitts-Linien derselben. Als Scheitelwinkel ist

AML = BMN
AMK = CMN
und KML = BMC

folglich sind auch die dazu gehörigen Bögen einander gleich,

nehmlich AEL = BDN
AGK = CFN
und KL = BC

---

mithin △ KLEAG ≅ △ BCFND, weil auch die Winkel dieser Dreyecke gleich sind. Eben so ist auch △ ABC ≅ △ KLN, △ ACHLE ≅ △ KNDBI und △ ABIKG ≅ △ LNFCH. Nun setze man △ ABC ≅ △ KLN = α, △ BCFND ≅ △ KLEAG = β, △ ACHLE ≅ △ KNDBI

$= \gamma$ und $\triangle$ ABIKG $\cong$ $\triangle$ LNFCH $= \delta$. $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ und $\alpha + \delta$ bilden allzeit zusammen ein Stück der Kugeloberfläche, welches durch zwey Halbmesser begränzt ist. Um den Flächeninhalt eines solchen Stückes $\alpha + \beta$ zu finden, stelle man sich vor, ABDNLE und ACFNKG stünden so senkrecht auf BCHLKI, daß A und N die beyden Pole bilden, und es ist dann $\alpha + \beta$ gleich dem so vielten Theile von der Kugeloberfläche, als BC vom größten Kreisumfange ist, nehmlich:

$$\alpha + \beta = 4\,r^2\pi : \frac{2\,r\,\pi}{BC} = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{BC}{2\,r\,\pi}.$$

Auf dieselbe Art erhält man auch

$$\alpha + \gamma = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{AC}{2\,r\,\pi} \text{ und } \alpha + \delta = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{AB}{2\,r\,\pi}.$$

Unter der angegebenen Voraussetzung gibt BC die Größe des sphärischen Winkels A, AC jene von B und AB jene von C an, so daß man also erhält

$$\alpha + \beta = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{A}{2\,r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{A}{r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{A}{180^\circ}$$

$$\alpha + \gamma = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{B}{2\,r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{B}{r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{B}{180^\circ}$$

$$\alpha + \delta = 4\,r^2\pi \,.\, \frac{C}{2\,r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{C}{r\,\pi} = 2\,r^2\pi \,.\, \frac{C}{180^\circ}$$

mithin $3\alpha + \beta + \gamma + \delta = \dfrac{2\,r^2\pi\,(A + B + C)}{180^\circ}$. Es ist auch

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\,r^2\pi$ (als die Oberfl. der Halbkugel)

mithin $$2\,\alpha = \frac{2\,r^2\pi\,(A + B + C) - 2\,r^2\pi \,.\, 180^\circ}{180^\circ}$$

$$= \frac{2\,r^2\pi}{180^\circ}\,(A + B + C - 180^\circ)$$

und α oder $\triangle$ ABC $= \dfrac{r^2\pi}{180^\circ}\,(A + B + C - 180^\circ)$.

Zusätze:

1) Ist $C = 90^\circ$, so erhält man

$$\triangle ABC = \frac{r^2 \pi}{180^\circ} (A + B - 90^\circ).$$

2) Ist $B = C = 90^\circ$, so ist

$$\triangle ABC = \frac{r^2 \pi \cdot A}{180^\circ}.$$

3) Sind alle 3 Winkel rechte, so wird

$\triangle ABC = \frac{90^\circ \cdot r^2 \pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \pi$, nehmlich des achten Theiles von der Oberfläche der Kugel, indem alle Seiten Quadranten sind.

4) Soll auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius r ist, der Flächeninhalt I eines sphärischen n Eckes gesucht werden, so zerlege man dieses Vieleck durch Diagonalbögen größter Kreise in sphärische Dreyecke. Man erhält dadurch $n - 2$ Dreyecke, und wenn man die Summe aller Winkel mit S bezeichnet, als den Gesammtüberschuß $S - (n - 2)\, 180^\circ$, woraus

$I = \frac{r^2 \pi}{180^\circ} [S - (n - 2)\, 180^\circ]$ folgt (nach der Formel des Lehrsatzes).

III. Abschnitt.

Reduktion der sphärischen Dreyecke auf die entsprechenden Sehnendreyecke.

§. 72.

Lehrsätze.

I. Benennt man den Radius der Kugel mit r und die 3 Seiten eines sphärischen Dreyeckes mit α, β und γ, so ist jede, diesen Seiten (Bögen) entsprechende Sehne dem dop-

pelten Produkte aus dem Radius mit dem Sinus der halben Seite (Bogens) des sphärischen Dreyeckes gleich; d. h.

$$\text{Chord. } \alpha = 2\ r\ .\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\text{Chord. } \beta = 2\ r\ .\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\beta$$
$$\text{Chord. } \gamma = 2\ r\ .\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Beweis: Nach §. 43 Zus. 2 ist für den Radius 1, Chord. $\alpha = 2 \sin. \frac{1}{2}\alpha$, Chord. $\beta = 2 \sin. \frac{1}{2}\beta$ und Chord. $\gamma = 2 \sin. \frac{1}{2}\gamma$; es ist demnach für den Radius r, Chord. $\alpha = 2\ r\ .\ \sin. \frac{1}{2}\alpha$, Chord. $\beta = 2\ r\ .\ \sin. \frac{1}{2}\beta$ und Chord. $\gamma = 2\ r\ .\ \sin. \frac{1}{2}\gamma$.

Zusätze:

1) Man kann demnach aus den Seiten eines sphärischen Dreyeckes die Seiten des entsprechenden Sehnendreyeckes, welches durch die Verbindung der Endpunkte der Bögen mittelst gerader Linien entsteht, finden.

2) Eben so kann man umgekehrt aus den Seiten des Sehnendreyeckes diejenigen des entsprechenden sphärischen Dreyeckes finden; denn aus dem Lehrsatze folgt

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{Chord. } \alpha}{2\ r},$$
$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\text{Chord. } \beta}{2\ r} \text{ und}$$
$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{Chord. } \gamma}{2\ r}.$$

3) Soll man aus den Seiten des Sehnendreyeckes die entsprechenden Winkel des dazugehörigen sphärischen Dreyeckes berechnen, so suche man zuvor nach §. 27 Zus. 10 die entsprechenden Seiten des sphärischen Dreyeckes, und hieraus nach §. 68 Zus. 1 die verlangten Winkel A, B, C.

4) Sollen aus den Seiten des sphärischen Dreyeckes die entsprechenden Winkel des dazugehörigen Sehnendreyeckes gesucht werden, so suche man zuvor die Seiten des Sehnendreyeckes (nach Zus. 2), und daraus nach §. 50 die verlangten Winkel.

§. 73.

II. Um aus zwey Seiten β und γ eines sphärischen Dreyeckes (Fig. 19) und dem davon eingeschlossenen Winkel A den, diesem Winkel entsprechenden Sehnenwinkel x zu finden, ist für den Radius 1

$$\cos. x = \sin. \tfrac{1}{2}\beta . \sin. \tfrac{1}{2}\gamma + \cos. \tfrac{1}{2}\beta . \cos. \tfrac{1}{2}\gamma . \cos. A.$$

Beweis:

Nach §. 68 ist

$$\cos. \alpha = \cos. \beta . \cos. \gamma + \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A.$$

Für den Radius 1 ist

$$\left.\begin{array}{l} \cos. \alpha = 1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha \\ \cos. \beta = 1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ \cos. \gamma = 1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma \end{array}\right\} \text{(§. 27 Zus. 7), folglich:}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = {} & (1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta)(1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma) \\ & + \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A \\ = {} & 1 - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ & \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma + \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta + 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = {} & 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ & \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma + \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = {} & 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta + 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ & \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma - \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A. \end{aligned}$$

Nun ist in dem Sehnendreyecke:

$$\begin{aligned} \text{Chord.}^2 \alpha = \text{Chord.}^2 \beta + \text{Chord.}^2 \gamma - 2 . \text{Chord.} \beta . \text{Chord.} \gamma \\ \cos. x. \text{ (§. 46).} \end{aligned}$$

Für den Radius 1 ist nach §. 72

$$\begin{aligned} \text{Chord.}^2 \alpha &= 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha \\ \text{Chord.}^2 \beta &= 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ \text{Chord.}^2 \gamma &= 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma. \end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{aligned} 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = {} & 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta + 4 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 8 . \sin. \tfrac{1}{2}\beta \\ & \sin. \tfrac{1}{2}\gamma . \cos. x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = {} & 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\beta + 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 4 . \sin. \tfrac{1}{2}\beta \\ & \sin. \tfrac{1}{2}\gamma . \cos. x. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung und obiger für $2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ folgt

$2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\beta + 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\gamma - 4 . \sin. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}\gamma . \cos. x$
$= 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\beta + 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\gamma - 4 . \sin.^2 \frac{1}{2}\beta . \sin.^2 \frac{1}{2}\gamma -$
$- \sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A,$

woraus $\cos. x = \sin. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}\gamma + \frac{\sin. \beta . \sin. \gamma . \cos. A}{4 . \sin. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}\gamma}$.

Da endlich nach §. 26 Zus. 4, $\sin. \beta = 2 \sin. \frac{1}{2}\beta \times \cos. \frac{1}{2}\beta$ und $\sin. \gamma = 2 \sin. \frac{1}{2}\gamma . \cos. \frac{1}{2}\gamma$, so ist
$\sin. \beta . \sin. \gamma = 4 . \sin. \frac{1}{2}\beta . \cos. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}\gamma . \cos. \frac{1}{2}\gamma$, und folglich
$\cos. x = \sin. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}\gamma + \cos. \frac{1}{2}\beta . \cos. \frac{1}{2}\gamma . \cos. A.$

Zusatz: Ist $\beta = \gamma$, so wird
$\cos. x = \cos.^2 \frac{1}{2}\beta . \cos. A + \sin.^2 \frac{1}{2}\beta$ oder
$1 - 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}x = \cos.^2 \frac{1}{2}\beta (1 - 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}A) + 1 - \cos.^2 \frac{1}{2}\beta$,
und $\sin. \frac{1}{2}x = \cos. \frac{1}{2}\beta . \sin. \frac{1}{2}A$.

§. 74.

III. Um aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Sehnendreyeckes (Fig. 19) den, diesem Winkel entsprechenden sphärischen Winkel zu finden, ist für den Radius 1

$$\cos. A = \frac{\cos. x - \frac{1}{2} \text{Chord.} \beta . \frac{1}{2} \text{Chord.} \gamma}{\sqrt{[(1 + \frac{1}{2}\text{Ch.}\beta)(1 - \frac{1}{2}\text{Ch.}\beta)(1 + \frac{1}{2}\text{Ch.}\gamma)(1 - \frac{1}{2}\text{Ch.}\gamma)}}.$$

Beweis: Für den Radius 1 ist $\sin. \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \text{Chord.} \alpha$, $\sin. \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \text{Chord.} \beta$ und $\sin. \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} \text{Chord.} \gamma$ (§. 13) also $\sin.^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4} \text{Chord.}^2 \alpha$, $\sin.^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4} \text{Chord.}^2 \beta$ und $\sin.^2 \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{4} \text{Chord.}^2 \gamma$. Nun ist nach §. 27 Zus. 7 $\cos. \alpha = 1 - 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\alpha$, $\cos. \beta = 1 - 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\beta$ und $\cos. \gamma = 1 - 2 . \sin.^2 \frac{1}{2}\gamma$, mithin $\cos. \alpha = 1 - \frac{1}{2} \text{Chord.}^2 \alpha$, $\cos. \beta = 1 - \frac{1}{2} \text{Chord.}^2 \beta$ und $\cos. \gamma = 1 - \frac{1}{2} \text{Chord.}^2 \gamma$.

Ferners ist $\sin. \beta = \sqrt{(1 - \cos.^2 \beta)} =$
$\sqrt{[1 - (1 - \frac{1}{2} \text{Chord.}^2 \beta)^2]} = \sqrt{(\text{Chord.}^2 \beta - \frac{1}{4} \text{Chord.}^4 \beta)}$
$= \text{Chord.} \beta \sqrt{(1 - \frac{1}{4} \text{Chord.}^2 \beta)} = \frac{1}{2} \text{Chord.} \beta \sqrt{(4 - \text{Chord.}^2 \beta)}$
und eben so auch $\sin. \gamma = \frac{1}{2} \text{Chord.} \gamma \sqrt{(4 - \text{Chord.}^2 \gamma)}$.

Substituirt man diese Werthe in

$$\cos. A = \frac{\cos. \alpha - \cos. \beta . \cos. \gamma}{\sin. \beta . \sin. \gamma} \text{ (§. 68 Zus. 1)},$$

so erhält man nach vorgenommener Reduction

$$\cos. A = \frac{2 . Ch.^2\beta + 2 . Ch.^2 \gamma - 2 . Ch.^2 \alpha - Ch.^2\beta . Ch.^2\gamma}{Ch. \beta . Ch. \gamma \sqrt{[(4 - Ch.^2 \beta)(4 - Ch.^2 \gamma)]}}.$$

Nun ist in dem Sehnendreyecke

$$Chord.^2\alpha = Chord.^2\beta + Chord.^2\gamma - 2. Chord.\beta . Chord.\gamma . \cos. x$$

(§. 46), woraus endlich

$$\cos. A = \frac{4 . \cos. x - Chord. \beta . Chord. \gamma}{\sqrt{[(4 - Ch.^2 \beta)(4 - Ch.^2 \gamma)]}} =$$

$$= \frac{\cos. x - \frac{1}{2} Chord. \beta . \frac{1}{2} Chord. \gamma}{\sqrt{[(1 + \frac{1}{2}Ch.\beta)(1 - \frac{1}{2}Ch.\beta)(1 + \frac{1}{2}Ch.\gamma)(1 - \frac{1}{2}Ch.\gamma)]}}.$$

Zusatz:

Setzt man $\beta = \gamma$, so wird

$$\cos. A = \frac{4 . \cos. x - Chord.^2 \beta}{4 - Chord.^2 \beta}, \text{ oder}$$

$$1 - \cos. A = 2 . \sin.^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{4 . \cos. x - Chord.^2 \beta}{4 - Chord.^2 \beta}$$

$$= \frac{4.(1 - \cos.x)}{4 - Ch.^2 \beta} \text{ und } \sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{4 . \sin.^2 \frac{1}{2} x}{4 - Ch.^2 \beta}\right]}$$

$$= \frac{2 . \sin. \frac{1}{2} x}{\sqrt{[(2 + Ch.\beta)(2 - Ch.\beta)]}} = \frac{\sin. \frac{1}{2} x}{\sqrt{[(1 + \frac{1}{2}Ch.\beta)(1 - \frac{1}{2}Ch.\beta)]}}.$$

Zweyte Abtheilung.

Die angewandte Trigonometrie.

I. Hauptstück.

Die angewandte ebene Trigonometrie, oder die trigonometrische Terrainaufnahme.

I. Abschnitt.

Vorkenntnisse.

§. 75.

Erfordernisse zur trigonometrischen Terrainaufnahme.

Nebst den in §. 233. meines Lehrbuches der reinen und angewandten Elementar-Geometrie angeführten Erfordernissen zur geometrischen Terrainaufnahme ist zur trigonometrischen Aufnahme der Erdoberfläche noch nöthig:

1) Eine gründliche Kenntniß der reinen ebenen Trigonometrie, welche die 1ste Abtheilung dieses Lehrbuches lehrt.

2) Ein Winkelmesser oder Astrolabium, d. i. ein Instrument, durch welches die Größe eines Winkels auf dem Felde in Graden, Minuten u. s. w. erhalten wird. Dasselbe besteht

   α) aus einem Stativ oder Gestelle, welches dem Instrumente in einer jeden beliebigen Richtung eine unbewegliche und sichere Stellung gibt;

β) aus einer Kreisebene oder nur einem Kreisringe, wovon der Rand in Grade, Minuten u. s. w. eingetheilt ist; hat das Astrolabium anstatt einem ganzen Kreise nur den vierten oder sechsten Theil desselben, so heißt das Instrument dann ins Besondere ein Quadrant oder ein Sextant;

γ) aus einer beweglichen Regel im Mittelpunkte genannter Kreisebene mit Diopteru oder einem Tubus (§. 233, 9tens im zweyten Theile), welche auch zugleich in einer auf dem Kreise senkrechten Ebene auf- und abwärts beweglich ist.

§. 76.

Da es sehr mühsam wäre, den ganzen Rand eines Astrolabiums in kleinere als halbe Grade einzutheilen, wenn der Durchmesser der Kreisebene nicht größer als einen Fuß und dadurch zu schwer und auf dem freyen Felde unbrauchbar werden sollte, so verbindet man mit der eingetheilten Kreisebene noch einen damit concentrischen kleinen Kreisbogen, mittelst dessen Eintheilung man im Stande ist, die Größe eines Bogens in seinen kleineren Theilen zu bestimmen. Diese Vorrichtung nennt man einen Nonius oder Vernier, je nachdem man deren Erfindung dem Portugiesen Peter Nunnez oder dem Deutschen Peter Vernier zueignet.

Ueber die Construktion eines Nonius oder Verniers sehe man das mathematische Lehrbuch zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen von Maurus Magold, zweyter Theil, die Elementar-Geometrie und Trigonometrie.

II. Abschnitt.

Trigonometrische Vermessungen der Linien, Winkel und Flächen.

§. 77.

A. Das Messen von Linien und Winkel.

Aufgaben.

I. Man soll in irgend einer Gegend einen Winkel messen.

Auflösung: (Fig. 20). Der auf dem Felde gegebene Winkel sey ACB. Man bringe das Astrolabium genau horizontal so über C an, daß der Mittelpunkt c der Kreisebene des Instruments senkrecht über C zu stehen kommt (2ter Theil §. 255), bewege die Regel um den Mittelpunkt so weit, bis die Kante auf dem eingetheilten Rande bey 0 anliegt, und befestige sie mittelst der daran befindlichen Stellschraube. Nun drehe man die ganze eingetheilte Kreisebene so weit um ihre Achse, bis das Objekt A in der Achse der Diopter oder des Tubus liegt, mithin die Kante der Regel in der Richtung von ca oder cD sich befindet, und befestige sodann die Kreisebene. Endlich mache man durch das Auflösen der oben erwähnten Stellschraube die Regel mit den Dioptern oder dem Tubus wieder beweglich, und drehe sie so weit, bis sich das andere Objekt B in der Achse der letztern befindet. Auf dem eingetheilten Rande der Kreisebene wird man sodann von 0 an bis zur Kante der Regel das Maaß des, auf den Horizont reducirten Winkels in Graden, Minuten ꝛc. ablesen können; denn durch die horizontale Stellung des Instruments wird acb = ACB.

Zusatz: Befindet sich der zu messende Winkel in einer Vertikalebene, so muß zu solchen Höhenmessungen entweder an dem Astrolabium auch nach vertikaler Richtung eine in Grade, Minuten ꝛc. getheilte Kreisebene

sich befinden (mit welcher besondern Vorrichtung man das Instrument einen Theodoliten nennt), oder, wenn das Astrolabium nur eine Kreisebene oder Scheibe hat, dasselbe so eingerichtet seyn, daß die Scheibe auch in jede vertikale Richtung, nehmlich in die Ebene des Höhenwinkels gebracht werden kann, wobey sodann dasselbe Verfahren statt findet, wie oben.

Anmerkung. Um mit solchen Vermessungen auch sogleich die Darstellung des Aufgenommenen verbinden zu können, bedient man sich dabey eben so, wie bey der geometrischen Terrainaufnahme (man sehe meinen zweyten Theil der Elementar-Mathematik §. 255) des Meßtisches.

§. 78.

II. Es sey eine gerade Linie zu messen, welche nur an ihren Endpunkten zugänglich ist.

Auflösung: (Fig. 21). Soll z. B. AB die zu suchende Weite seyn, so wähle man einen dritten Punkt C, von wo aus man nach A und B sehen und messen kann, setze hier den Meßtisch mit dem Astrolabium auf, messe nach §. 77 den Winkel ACB und die Linien AC und BC, so wird nach §. 46

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - 2 \,.\, AC \,.\, BC \,.\, \cos.\, C)}.$$

Beyspiel: Setzt man AC = 250', BC = 225' und C = 68° 25', so wird

$$AB = \sqrt{(250^2 + 225^2 - 2 \,.\, 250 \,.\, 225 \,.\, \cos.\, 68^\circ 25')}$$
$$= \sqrt{(62500 + 50625 - 112500 \,.\, \cos.\, 68^\circ 25')}$$

Vor allem berechne man 112500 . cos. 68° 25'; nehmlich:

$$\log.\,(112500 \,.\, \cos.\, 68^\circ 25') = \log.\, 112500 + \log.\, \cos.\, 68^\circ 25'.$$

Nun ist log. 112500 = 5,05115

log. cos. 68° 25' = 0,56568—1 (für r = 1, §. 35);

mithin log. (112500 . cos. 68° 25') = 3,48547, woraus

$$112500 \,.\, \cos.\, 68^\circ 25' = 3058{,}2.$$

Es ist also $AB = \sqrt{(62500 + 50625 - 3058,2)}$
$= \sqrt{110066,8} = 331,7.$
Nehmlich $= AB = 331,'7.$

§. 79.

III. Man soll die Entfernung zweyer Objekte von einander messen, wenn nur eines davon zugänglich ist.

Auflösung: (Fig. 22). Die beyden Objekte seyen A und B, wovon nur A zugänglich ist. Man mache einen Punkt C ausfindig, von welchem aus man A und B sehen und nach A messen kann. In diesem Punkte C stelle man den Meßtisch auf, und nehme den Winkel ACB auf. Hierauf verbringe man dem Meßtisch nach A, und nehme den Winkel BAC auf. Mißt man noch die Linie AC, so läßt sich auch der dritte Winkel B leicht finden, wonach sodann nach §. 44 $AB = \frac{AC \cdot \sin. C}{\sin. B}$ wird.

Beyspiel: Es sey $ACB = 87^\circ\ 46'$, $BAC = 55^\circ\ 12'$ und $AC = 336'$ durch die angegebenen Vermessungen gefunden worden, so ist vor allem $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 142^\circ\ 58' = 37^\circ\ 2'$, folglich $\log. AB = \log. 336' + \log. \sin. 87^\circ\ 46' - \log. \sin. 37^\circ\ 2'$. Nun ist

$$\log. 336' = 2,52634$$
$$\log. \sin. 87^\circ\ 46' = 9,99967$$
$$\text{D. E. } \log. \sin. 37^\circ\ 2' = 0,22020 - 10, \text{ folglich}$$

$$\log. AB = 12,74621 - 10$$
$$= 2,74621 \text{ und}$$
$$\text{endlich } AB = 557,'4.$$

§. 80.

IV. Die Entfernung zweyer Objekte von einander zu messen, wenn keines von ihnen zugänglich ist.

Auflösung: (Fig. 23). AB sey die zu messende Weite. Man wähle eine Standlinie CD, von deren End-

punkten aus man nach A und B sehen kann, und messe dieselbe. Ferners messe man in C die Winkel ACB und BCD und in D die Winkel ADC und BDC. Hierdurch hat man in dem Dreyecke ACD die Winkel ACD und ADC, so wie auch die davon eingeschlossene Seite CD, woraus sich die Seite AD berechnen läßt (§. 79). Eben so erhält man im Dreyecke BCD aus den Winkeln BCD und BDC und aus der Seite CD die Seite BD.

Es ist nun in dem Dreyecke ADB die Seite AD und BD mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ADB bekannt, woraus man eben so, wie in §. 78 die Weite AB berechnen kann.

§. 81.

V. Es soll eine gegebene schiefe Linie auf den Horizont reducirt werden, deren Neigungswinkel gegen den Horizont bekannt ist.

Auflösung: (Fig. 8). Die gegebene schiefe Linie sey AC und β der Neigungswinkel derselben gegen den Horizont, so ist BC die zu suchende Größe (2ter Theil §. 232). Nun ist $B = 90°$, folglich $AC : BC = r : \cos. \beta$ (§. 41), woraus für den Radius 1, $BC = AC \cdot \cos. \beta$ ist.

Beyspiel: $AC = 252'$ sey die Abdachung einer Anhöhe und $\beta = 48° \, 20'$ der Böschungswinkel, so ist die Anlage dieser Anhöhe

$BC = 252' \times \cos. 48° \, 20'$ und

$\log. BC = \log. 252' + \log. \cos. 48° \, 20'$.

Nun ist $\log. 252' = 2{,}40140$

$\log. \cos. 48° \, 20' = 0{,}82269 - 1$ (für $r = 1$, §. 35).

also $\log. BC = 3{,}22409 - 1$

$= 2{,}22409$

und endlich $BC = 167{,}'5$.

§. 82.

VI. Eine gegen den Horizont schiefe Linie und ihr Neigungswinkel ist gegeben, man soll die wahre Höhe des erhöhten Endpunktes der schiefen Linie über den Horizont bestimmen.

Auflösung: (Fig. 8). Es sey AC die gegebene schiefe Linie und β ihr Neigungswinkel gegen den Horizont BC, so ist AB die Erhöhung des Punktes A über den Horizont. Da B = 90° ist, so ist

$$AB : AC = \sin.\ \beta : 1 \text{ (§. 40, für } r = 1\text{)},$$

woraus $AB = AC \,.\, \sin.\ \beta$ folgt.

Beyspiel: AC = 252′ sey die Böschung einer Anhöhe und $\beta = 48^\circ\ 20'$ der dazu gehörige Böschungswinkel, so ist die Höhe dieser Anhöhe, nehmlich

$$AB = 252' \,.\, \sin.\ 48^\circ\ 20' \text{ oder}$$

$$\log.\ AB = \log.\ 252' + \log.\ \sin.\ 48^\circ\ 20'.$$

Es ist nun $\log.\ 252' = 2{,}40140$

$\log.\ \sin.\ 48^\circ\ 20' = 0{,}87334 - 1$ (für $r = 1$)

folglich $\log.\ AB = 3{,}27474 - 1$

$= 2{,}27474$, woraus

$AB = 188{,}'2$ folgt.

§. 83.

VII. (Fig. 8). Es ist BC die Reduktion der schiefen Linie AC auf dem Horizonte und β der Neigungswinkel, man soll AC selbst und die Höhe des Punktes A über dem Horizonte bestimmen.

Auflösung: B = 90°, folglich

1) $AC : BC = 1 : \cos.\ \beta$ (§. 41 Zus. 2) und also

$$AC = \frac{BC}{\cos.\ \beta};$$

2) $AB : BC = \text{tg.}\ \beta : 1$ (§. 42 Zus. 2), woraus

$$AB = BC \,.\, \text{tg.}\ \beta.$$

Beyspiele:

1) BC = 536′ sey die Anlage eines Berges und β = 36° 47′ der Böschungswinkel, man soll die Böschung desselben AC bestimmen:

$$AC = \frac{536'}{\cos.\ 36^\circ\ 47'}, \text{ oder}$$

$$\log.\ AC = \log.\ 536' - \log.\ \cos.\ 36^\circ\ 47'.$$

Nun ist nach den Tabellen

$$\log.\ 536' = 2{,}72916$$
$$\log.\ \cos.\ 36^\circ\ 47' = 0{,}90358 - 1\ (\text{§. } 35),$$
$$-\qquad\qquad +$$

$$\text{also } \log.\ AC = 1{,}82558 + 1$$
$$= 2{,}82558, \text{ und endlich}$$
$$AC = 669{,}'2.$$

2) Aus den ad 1 gegebenen Stücken BC und β soll die Höhe AB des Berges gesucht werden:

$$AB = 536'\ .\ \text{tg. } 36^\circ\ 47' \text{ oder}$$
$$\log.\ AB = \log.\ 536' + \log.\ \text{tg. } 36^\circ\ 47'.$$
$$\log.\ 536' = 2{,}72916$$
$$\log.\ \text{tg. } 36^\circ\ 47' = 0{,}87369 - 1\ (\text{§. } 35),$$

$$\text{mithin } \log.\ AB = 3{,}60285 - 1$$
$$= 2{,}60285, \text{ wonach}$$
$$AB = 400{,}'7 \text{ ist.}$$

3) Es sey die Höhe eines Berges AB = 1225′ und der Böschungswinkel β = 6° 2′ 26″ bekannt, man soll die Größe der Abdachung AC finden:

Für den Radius 1 ist nach §. 40

$$AC = \frac{AB}{\sin.\ \beta} = \frac{1225'}{\sin.\ 6^\circ\ 2'\ 26''} \text{ oder}$$

$$\log.\ AC = \log.\ 1225' - \log.\ \sin.\ 6^\circ\ 2'\ 26''.$$

Nun ist log. 1225′ = 3,08814
log. sin. 6° 2′ 26″ = 0,02215 — 1 (§. 35)

− +

---

also log AC = 4,06599 und
AC = 11641′.

4) Aus den ad 3 gegebenen Stücken AB und β soll die Anlage BC des Berges gesucht werden, so ist:

$$BC = \frac{AB}{tg.\ \beta} \text{ (§. 42 Zus. 2)}$$

$$= \frac{1225'}{tg.\ 6^\circ\ 2'\ 26''} \text{ oder}$$

log. BC = log. 1225′ — log. tg. 6° 2′ 26″.
log. 1225′ = 3,08814
log. tg. 6° 2′ 26″ = 0,02457 — 1 (§. 35)

− +

---

mithin log. BC = 4,06357 und
BC = 11576′.

5) Die Höhe AB = 324′ und die Böschung AC = 360′ eines Berges ist bekannt, man soll daraus den Böschungswinkel β suchen:

Für den Radius 1 ist nach §. 40

$$\sin.\ \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{324'}{360'} \text{ oder}$$

log. sin. β = log. 324′ — log. 360′.
+ 1 — 1
Nun ist log. 324′ = 2,51055
log. 360′ = 2,55630

---

mithin log. sin. β = 0,95425 — 1.
Für den Radius der Tabellen aber ist
log. sin. β = 9,95425 (§. 35),
woraus endlich β = 64° 9′ 30″.

6) Man soll aus der Höhe AB = 355′ und aus der Anlage BC = 419′ eines Berges den Böschungswinkel β suchen:

Nach §. 42 ist für r = 1

$$tg.\ \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{355'}{419'} \text{ oder}$$

$$\log.\ tg.\ \beta = \log.\ 355' - \log.\ 419'.$$
$$\quad +1 \qquad\qquad -1$$

$$\log.\ 355' = 2'55023$$
$$\log.\ 419' = 2'62221$$

folglich log. tg. β = 0,92802 — 1 für den Radius 1, für den Radius der Tabellen aber ist log. tg. β = 9,92802 (§. 35), woraus sodann β = 40° 16′ 23″ ist *).

§. 84.

VIII. Man soll die Höhe eines Gegenstandes messen, wenn der Punkt, in welchem die Höhenlinie den Horizont berührt, zugänglich ist.

Auflösung: Es können zwey Fälle statt finden: Entweder liegt der Standpunkt und der Durchschnittspunkt der Höhenlinie mit dem Horizonte auf einer und derselben Horizontalebene, oder es liegen diese beyden Punkte in verschiedenen Horizontalebenen.

ad 1) (Fig. 24) Man messe vom Standpunkte C aus bis an den Fuß des Gegenstandes B die Horizontale

---

*) Mittelst einer Tabelle über die trigonometrischen Funktionen lassen sich alle diese Aufgaben auch ohne Logarithmen auflösen. So z. B. ist §. 82 AB = 252′ sin. 48° 20′, und da nach den Tabellen der trigonometrischen Funktionen für den Radius 1 der sin. 48° 20′ = 0,74703, so ist AB = 252 × 0,74703, woraus AB = 188,25156 folgt. Auf ähnliche Art werden die Aufgaben in §. 83 und die nachfolgenden gelöset.

BC; in C messe man mit dem Astrolabium den Höhenwinkel ADE, nachdem man es zuvor in horizontale Richtung nach E auf 0 gestellt hat; und man erhält AE = DE . tg. ADE für r = 1 (§. 42). Die wahre Höhe des Gegenstandes AB = AE + BE = DE . tg. ADE + BE = BC . tg. ADE + CD d. h. man addire zu BC . tg. ADE noch die Höhe des Astrolabiums über den Horizont.

ad 2) (Fig. 25 und 26.) Man bestimme den Horizontalabstand (in Fig. 25, FC = DE und in Fig. 26, BF = DE) des Standpunktes von dem Durchschnittspunkte der Höhenlinie mit dem Horizonte; stelle das Astrolabium, horizontal auf 0 gerichtet, in C auf, und messe den Winkel ADE, so erhält man AE = DE . tg. ADE (§. 42). Ferners messe man auch BDE, so wird BE = DE . tg. BDE (§. 42). Es ist demnach in Fig. 25

$$AB = AE - BE = DE \cdot tg.\ ADE - DE \cdot tg.\ BDE = DE\,(tg.\ ADE - tg.\ BDE)$$

$$= DE \cdot \frac{\sin.\ (ADE - BDE)}{\cos.\ ADE \cdot \cos.\ BDE} \quad (\S.\ 32\ \text{Zus. } 2).$$

Und in Fig. 26

$$AB = AE + BE = DE \cdot tg.\ ADE + DE \cdot tg.\ BDE = DE\,(tg.\ ADE + tg.\ BDE)$$

$$= DE \cdot \frac{\sin.\ (ADE + BDE)}{\cos.\ ADE \cdot \cos.\ BDE} \quad (\S.\ 32\ \text{Zus. } 1).$$

Beyspiele:

1) Es sey (Fig. 24) BC = 124′, CD = 5′ und ADE = 50° 20′, wie groß ist AB?

$$AB = BC \cdot tg.\ ADE + DC$$
$$= 124' \cdot tg.\ 50^\circ\ 20' + 5'.$$

Will man diese Aufgabe ohne Logarithmen auflösen, so sage man AB = 124′ . 0,76977 + 5′, weil tg. 50° 20′

für den Radius 1 gleich 0,76977 ist, woraus AB = 100′, 45148.

2) Es sey (Fig. 25) CF = DE = 531′, ADE = 45° 22′ und BDE = 4° 53′ 18″, man soll AB bestimmen:

$$AB = DE \,.\, \frac{\sin.\,(ADE - BDE)}{\cos.\,ADE\,.\,\cos.\,BDE}$$

$$= 531\,.\,\frac{\sin.\,40^\circ\,28'\,42''}{\cos.\,45^\circ\,22' \times \cos.\,4^\circ\,53'\,18''}$$

oder $\log.\,AB = \log.\,531' + \log.\,\frac{\sin.\,40^\circ\,28'\,42''}{\cos.\,45^\circ 22' \times \cos.\,4^\circ 53'\,18''}$

$= \log.\,531' + \log.\,\sin.\,40^\circ\,28'\,42'' - (\log.\,\cos.\,45^\circ\,22' + \log.\,\cos.\,4^\circ\,53'\,18'')$. Nun ist

$\log.\,531 = 2{,}72509$

$\log.\,\sin.\,40^\circ\,28'\,42'' = 0{,}81235 - 1$ (für $r = r$); also

$\log.\,531 + \log.\,\sin.\,40^\circ\,28'\,42'' = 2{,}53744.$

Ferners ist

$\log.\,\cos.\,45^\circ\,22' = 0{,}84669 - 1$

$\log.\,\cos.\,4^\circ\,53'\,18'' = 0{,}99856 - 1$, also

$\log.\,\cos.\,45^\circ\,22' + \log.\,\cos.\,4^\circ\,53'\,18'' = 0{,}84525 - 1.$

Man erhält demnach

$\log.\,AB = 2{,}53744$

$0{,}84525 - 1$

$- \quad +$

$= 1{,}69219 + 1$

$= 2{,}69219$ und endlich

$AB = 492',2.$

§. 85.

IX. Es ist die Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn der Punkt, in welchem die Höhenlinie den Horizont berührt, unzugänglich ist.

Auflösung: (Fig. 27). Man wähle in der Horizontallinie BD in gerader Linie zwey Punkte C und D, und

messe sowohl CD = EF, als auch die Winkel α und β. Nun ist im $\triangle$ AEF die Seite $AE = \frac{EF \,.\, \sin.\, \alpha}{\sin.\, A}$ (§. 44). Es ist aber $A = \beta - \alpha$ (weil vermöge der Geometrie $\beta = \alpha + A$), mithin $AE = \frac{EF \,.\, \sin.\, \alpha}{\sin.\, (\beta - \alpha)}$. Ferners ist in dem rechtwinkligen Dreyecke AEG, $AG = AE \,.\, \sin.\, \beta$ (§. 40 für $r = 1$) oder $AG = \frac{EF \,.\, \sin.\, \alpha \,.\, \sin.\, \beta}{\sin.\, (\beta - \alpha)} =$

$\frac{EF \,.\, \sin.\, \alpha \,.\, \sin.\, \beta}{\sin.\, \beta \,.\, \cos.\, \alpha - \cos.\, \beta \,.\, \sin.\, \alpha}$ (§. 26 Zus. 5) $= \frac{EF}{\text{cotg.}\, \alpha - \text{cotg.}\, \beta}$, wenn man Zähler und Nenner durch $\sin.\, \alpha \,.\, \sin.\, \beta$ dividirt; und endlich $AB = \frac{EF}{\text{cotg.}\, \alpha - \text{cotg.}\, \beta} + CE$.

Zusatz:

Wenn nicht Raum dazu vorhanden ist, die drey Punkte in gerader horizontaler Linie annehmen zu können, so wähle man eine beliebige Standlinie CD (Fig. 28), messe dieselbe, so wie die Winkel AEF und AFE, indem man bey letztern beyden die Kreisebene des Astrolabiums in die Ebene von AEF bringt, und man bekömmt im $\triangle$ AEF nach §. 44

$$EF : AE = \sin.\, EAF : \sin.\, AFE,$$ woraus

$$AE = \frac{EF \,.\, \sin.\, AFE}{\sin.\, EAF}.$$ Ferners ist für den Radius 1 im rechtwinkligen Dreyecke AGE

$$AG = AE \,.\, AEG$$

$$= \frac{EF \,.\, \sin.\, AFE \,.\, \sin.\, AEG}{\sin.\, EAF}$$

und endlich $AB = \frac{EF \,.\, \sin.\, AFE \,.\, \sin.\, AEG}{\sin.\, EAF} + CE$.

Man darf demnach nur noch AEG messen, und EAF aus AFE und AEF berechnen, so ist AB bestimmt.

§. 86.

X. Es soll die Breite eines Flußes oder Grabens gemessen werden.

Auflösung: (Fig. 29). Ist AB die zu messende Breite, so stelle man in B das Astrolabium genau senkrecht mit vertikal gedrehter Kreisebene auf, und messe den Winkel ACB = α; da man nun BC kennt, so ist AB = BC . tg. α (§. 42 Zus. 2).

Beyspiel: Es sey BC = 5′ und α = 87° 40′, so wird AB = 5′ . tg. 87° 40′ = 5 × 24,5418 (für r = 1) = 122′,7090.

§. 87.

B. Das Messen von Flächen.

a) Erklärungen.

Bey einer jeden Aufnahme von Flächen muß man trachten, ein Netz von Dreyecken durch die richtige Bestimmung mehrerer fixer Punkte zu erhalten. Man nennt dasselbe das Trianguliren, und die Darstellung der Gegend durch diese Eintheilung in Dreyecke das trigonometrische Netz der Gegend.

Die Vorbereitungen bey solchen Vermessungen sind im übrigen ganz dieselben, wie zu geometrischen Aufnahmen, so wie auch die Darstellung solcher Aufnahmen auf dieselbe Art durch Construktion von Dreyecken geschieht. (Man sehe hierüber den zweyten Theil meines Lehrbuches die Aufnahme von Flächen überhaupt §. 249 und 250 und die geometrische Terrainaufnahme mit dem Meßtische, §. 255.)

§. 88.

b) Aufgaben.

I. Es soll eine Fläche gemessen werden, wenn man von zwey Punkten aus innerhalb derselben nach allen Winkeln visiren kann.

Auflösung: (Fig. 30). Die zu messende Fläche sey ABCD und E und F seyen die 2 Punkte, von welchen aus nach allen Winkeln visirt werden kann. Um diese Fläche trianguliren zu können, nehme man EF als Standlinie an, messe dieselbe, und visire von ihren Endpunkten aus nach allen Winkeln der Fläche; die sich um E und F ergebenden Winkel messe man mit dem Astrolabium, und notire sich dieselben genau. Man erhält demnach die ganze Fläche ABCD in die Dreyecke AEB, BEG, BGC, CFG, EFG, CFD, DFH, ADH, AEH und EFH getheilt.

Um den Flächeninhalt der Fläche ABCD bestimmen zu können, berechne man aus der bekannten Standlinie und den gemessenen Winkeln den Inhalt eines jeden einzelnen Dreyeckes, und stelle dieselben sodann in eine Summe zusammen.

§. 89.

II. Es soll eine Fläche gemessen werden, wenn man dieselbe der Länge nach mit einer in allen Punkten zugänglichen Standlinie durchschneiden kann.

Auflösung: (Fig. 31). Die aufzunehmende Fläche sey ABCDEFGHIK, innerhalb welcher sich noch die Ortschaften L und M befinden. Zur Standlinie wähle man CN, indem sie, sehr vortheilhaft, durch zwey Orte C und L geht, und so erhöht liegt, daß man von ihr aus alle nöthigen Orte übersehen kann.

Die Standlinie CN betrachte man als Abscissenlinie, und messe auf derselben die Abscissen von den senkrechten Ordinaten der Punkte ABDEFGHIK und die Winkel DCd, BCb, Ede, Aba, Kak, Fef, Gfg, Igi, Hgh und Hih = Iio. Aus den sich ergebenden rechtwinkligen Dreyecken kann man die Ordinaten berechnen, wonach sodann die Punkte ABD EFGHIK bestimmt sind. Mit Hülfe der gegebenen und nun gefundenen Stücke kann man den Inhalt der einzelnen Drey-

ecke, in welche durch dieses Verfahren die Gegend triangulirt wird, berechnen, und durch deren Summirung den Inhalt der ganzen Fläche finden.

Die Punkte C und L sind ohnedies bestimmt, weil sie in der angenommenen Standlinie liegen. Um M zu erhalten, messe man die Abscisse dm und den Winkel Mdm und berechne daraus mM.

Zusätze:

1) Kann man keine solche Standlinie, wie hier CN, ausfindig machen, von welcher aus man die nöthigen Punkte sehen kann, so muß man mehrere solche Standlinien wählen, deren Lage zu einander aber allzeit bestimmt werden muß. Diejenigen Punkte, in welchen diese Standlinien zusammenstossen, und von welchen aus demnach die Vermessungen geschehen, heißen trigonometrische Punkte.

2) Das Aufnehmen des Details, je nachdem es Weiten oder kleinere Flächen betrifft, geschieht nach dem bereits in der Geometrie angegebenen Verfahren, entweder durch das Abschneiden, oder durch Abscissen und Ordinaten. Das Einzeichnen des Terrains muß sogleich in das Brouillon geschehen, und nach der Zurückkunft von dem Vermessen, wo möglich noch desselben Tages, auf der Meßtischplatte mit Tusch ausgeführt werden.

II. Hauptstück.

Die angewandte sphärische Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Vorkenntnisse.

§. 90.

Erklärungen.

Die Anwendung der sphärischen Trigonometrie findet vorzüglich in der mathematischen Geographie, Nautik (Steuermannskunde), Gnomonik und Astronomie statt.

Um hierüber Aufgaben lösen zu können, sind einige Vorbegriffe nöthig, welche in folgenden §§. erklärt werden sollen.

§. 91.

Die Zeit, in welcher die Erde sich einmal um ihre Achse dreht, die Benennungen Weltachse, Weltpole, Aequator, Parallelkreise, Meridiane, Zenith (Scheitelpunkt), Nadir (Fußpunkt), Horizont, Ost (Morgen), West (Abend), Süd (Mittag), Nord (Mitternacht), Ekliptik (Sonnenbahn), Equinoctialpunkte (Tag- und Nachtgleichen), Solstitialpunkte (Sonnenstillstandspunkte), Polarkreise, Wendekreise, Thierkreis, die Begriffe von geographischer Länge und Breite eines Ortes u. dgl. werden Jedem noch aus den ersten Schulen, wo man die Vorbegriffe der allgemeinen Geographie erlernt, bekannt seyn, und man findet dazu nur noch nöthig, Folgendes zu erwähnen.

§. 92.

(Fig. 32.) Jeder Kreis ZEN, durch die Pole Z und N des Horizonts BED und den Stern α gelegt, heißt der Scheitelkreis dieses Sterns. Das Stück Eα, welches zwischen dem Sterne α und dem Horizonte BED liegt, wird die Höhe des Sternes α, und das Complement dieses Bogens Zα, nehmlich der Abstand des Sterns vom Zenithe, die Zenithdistanz dieses Sternes genannt; für einen Stern β unter dem Horizonte heißt der Bogen Eβ seine Tiefe, und es ist dann Zβ seine Zenithdistanz.

Derjenige Theil DP eines Meridians PDNAZ, welcher Theil zwischen dem Horizonte BED und dem nächsten Pole P liegt, heißt die Polhöhe des Ortes C, von welchem der Meridian und der Horizont genommen sind. Das Stück AB des Meridians zwischen dem Horizonte und dem Aequator nennt man die Höhe des Aequators für diesen Ort.

§. 93.

Der Durchschnittspunkt γ, welchen die Bahn $\gamma\alpha$F eines Himmelskörpers mit dem Meridiane PDNAZ des Ortes C macht, wird der Culminationspunkt, und die Zeit, in welcher dieses Culminiren statt findet, die Culminationszeit dieses Himmelskörpers genannt.

Wenn man durch irgend einen Punkt α auf der Himmelskugel und durch die Weltpole W und P einen größten Kreis legt, so steht dieser auf dem Aequator senkrecht, und man nennt dasjenige Stück αG, welches zwischen dem Aequator und dem gegebenen Punkte liegt, die Deklination (Abweichung vom Aequator), und das Complement desselben αP die Polardistanz dieses Punktes. Die Deklination eines Punktes heißt nördlich oder südlich, je nachdem sie nördlich oder südlich vom Aequator ausgeht.

Derjenige Bogen BE des Horizonts BED zwischen dem dazu gehörigen Meridian PDNAZ und des Scheitelkreises ZEN eines Sternes α heißt das Azimuth dieses Sterns, und der Winkel BZE, welcher von diesen zwey Kreisen am Zenithe gebildet wird, sein Azimuthalwinkel. Das Azimuth heißt östlich oder westlich, je nachdem es östlich oder westlich vom Meridiane liegt.

§. 94.

Jeden mit dem Horizonte BED parallel gedachten Kreis H$\alpha\delta$P nennt man ein Mukantarat. Zwey Sterne α und δ in einerley Mukantarat H$\alpha\delta$P haben gleiche Höhen Eα = Kδ, aber verschiedene Azimuthe BE und BK, und man nennt sodann den Bogen EK am Horizonte die Azimuthaldifferenz dieser zwey Sterne.

Diejenigen Deklinationskreise, welche von 15 zu 15 Grade von einander abstehen, heißen Stundenkreise, und die dadurch entstehenden sphärischen Winkel APB, BPD u. s. w. (Fig. 33) die Stundenwinkel, weil die Sonne während ihrer täglichen Bewegung gerade eine Stunde braucht, um von einem Stundenkreise in den nächsten zu gelangen. Es gehen demnach bey gnomonischen Berechnungen 15 Grade auf eine Stunde Zeit (weil 360° : 24 Stunden = x° : 1 Stunde), und folglich 15 Minuten im Bogen auf 1 Minute in der Zeit u. s. w.

§. 95.

Der Stift einer Sonnenuhr muß allzeit mit der Weltachse parallel gezogen werden, und wird der Weiser oder Zeiger der Sonnenuhr genannt. Legt man durch den Weiser eine Ebene senkrecht auf die Ebene der Uhr, so heißt die Durchschnittslinie dieser beyden Ebenen die Substylarlinie für diese Uhr.

Es gibt verschiedene Sonnenuhren. Ist die Ebene der Uhr mit dem Aequator AQ (Fig. 33) parallel und der Wei-

ser CP darauf senkrecht (mit der Achse parallel), so wird nach der oben gegebenen Definition von den Stundenwinkeln der Schatten des Weisers in gleichen Zeiträumen gleiche Winkel ACB = BCD u. s. w. beschreiben; eine solche Uhr nennt man eine Aequinoctialuhr.

Eine Sonnenuhr, deren Ebene horizontal ist, heißt eine Horizontaluhr.

Ist hingegen die Ebene MN (Fig. 34) der Sonnenuhr auf dem Horizonte senkrecht, so nennt man sie eine Vertikaluhr; ist PW der Weiser (parallel mit der Weltachse) und die Ebene PWL senkrecht auf MN, so ist SP die Substylarlinie (man sehe weiter oben). Bey Vertikaluhren ist die Ebene derselben entweder nach den vier Weltgegenden gerichtet oder nicht; in ersterm Falle heißt sie dann eine Morgen-, Abend-, Mittags- oder Mitternacht-Uhr; in letzterm eine deklinirende Uhr (abweichende Uhr). Bey letzterm wird der Abweichungswinkel dem Bogen des Horizontes gleich, welchen die verlängerte Ebene der Uhr mit der Mittagslinie einschließt.

Die Mittagslinie der Uhr ist ihr Durchschnitt mit der Mittagsfläche; es fällt demnach des Weisers Schatten zu Mittag auf diese Linie. Der Durchschnitt eines Stundenkreises mit der Ebene der Uhr heißt die dazu gehörige Stundenlinie der Uhr, und sein Winkel mit der Mittagslinie der Uhr der dazu gehörige Stundenwinkel.

Aus der Zeit, wie lange die Ebene der Uhr von der Sonne beschienen wird, findet man die Anzahl der Stundenlinien, welche auf der Uhr zu ziehen sind.

II. Abschnitt.

Aufgaben aus der mathematischen Geographie, Nautik, Gnomonik und Astronomie.

§. 96.

I. Man soll aus der geographischen Länge und Breite zweyer Orte die geographische Entfernung derselben auf der Erdoberfläche bestimmen.

Auflösung: (Fig. 35.) Diese beyden Orte seyen A und B, MN sey der Aequator und MP der erste Meridian, so sind AD und BE die Breiten und MD und ME die Längen dieser Orte (wovon PAD und PBE die Meridiane sind), und der Bogen AB eines größten Kugelkreises ist ihre zu suchende geographische Entfernung.

Man setze $BE = \alpha$, $AD = \beta$, $ME = \gamma$ und $MD = \delta$, so wird $BP = 90° - \alpha$, $AP = 90° - \beta$ und $APB = DE = \gamma - \delta$.

Benennt man die zu suchende Entfernung AB mit p, so ist nach §. 68 Zus. 2 aus den bekannten zwey Seiten nebst dem davon eingeschlossenen Winkel

$$\cos. p = \frac{\cos. AP}{\cos. \varphi} . \cos. (BP - \varphi),$$

worin $tg. \varphi = tg. AP . \cos. APB$ ist. Substituirt man die gegebenen Werthe, so erhält man

$$\cos. p = \frac{\cos. (90° - \beta)}{\cos. \varphi} . \cos. (90° - \alpha - \varphi),$$

worin $tg. \varphi = tg. (90° - \beta) . \cos. (\gamma - \delta)$ ist.

Beyspiel: Es sey (Fig. 35)

vom Orte A die Breite $\beta = 43° 50'$
" " " " Länge $\delta = 18° 48'$
" " B " Breite $\alpha = 48° 8'$
" " " " Länge $\gamma = 29° 10'$;

man soll die geographische Entfernung $AB = p$ dieser Orte berechnen:

$$\cos. p = \frac{\cos. (90^\circ - 43^\circ\, 50')}{\cos. \varphi} . \cos. (90^\circ - 48^\circ\, 8' - \varphi)$$

$$= \frac{\cos. 46^\circ\, 10'}{\cos. \varphi} . \cos. (41^\circ\, 52' - \varphi).$$

Nun ist $tg. \varphi = tg. (90^\circ - 43^\circ\, 50') \times \cos. (29^\circ\, 10' - 18^\circ\, 48') = tg. 46^\circ\, 10' \times \cos. 10^\circ\, 22'$.

Es ist $\log. tg. 46^\circ\, 10' = 0{,}01769$

$\log. \cos. 10^\circ\, 22' = 0{,}99285 - 1$

also $\log. tg. \varphi = 0{,}01054$,

welchem $\varphi = 45^\circ\, 41'$ entspricht.

Folglich ist $\cos. p = \frac{\cos. 46^\circ\, 10'}{\cos. 45^\circ\, 41'} . \cos. - 3^\circ\, 49'$.

Für einen negativen Winkel im ersten Quadranten ist der Cosinus positiv, also auch der Logarithmus desselben; es ist demnach

$\log. \cos. 46^\circ\, 10' = 0{,}84046 - 1$

$\log. \cos. - 3^\circ\, 49' = 0{,}99904 - 1$

$+1 \qquad - 1$

$= 0{,}83950 - 1$

$\log. \cos. 45^\circ\, 41' = 0{,}84424 - 1$

$- \qquad +$

also $\log. \cos. p = 0{,}99526 - 1$

woraus $p = 8^\circ\, 26'$.

Da endlich 1° des größten Kugelkreises der Erde, wovon p ein Bogen ist, 15 geographische Meilen hat, so beträgt die gefundene Bogenlänge von p im Längenmaaße 126½ geographische Meilen.

§. 97.

II. Aus den geographischen Breiten zweyer Orte und aus der geographischen Entfernung derselben von einander ihren Längenunterschied zu finden.

Auflösung: (Fig. 35.) Man setze die Breite des Ortes $B = \alpha$, jene von $A = \beta$ und die Entfernung die-

ser Orte = p, so ist der Längenunterschied DE = ϱ oder, welches einerley ist, der sphärische Winkel APB = ϱ das zu suchende Stück, und man erhält nach §. 68 Zus. 2

$$\cos.\ \varrho = \frac{\cos.\ (AB + \varphi)}{\sin.\ AP\ .\ \sin.\ BP\ .\ \cos.\ \varphi}.$$

Da nun AB = p, AP = 90° — β und BP = 90° — α,

so ist $\cos.\ \varrho = \frac{\cos.\ (p + \varphi)}{\sin.\ (90^\circ - \beta)\ .\ \sin.\ (90^\circ - \alpha)\ .\ \cos.\ \varphi}$,

in welcher Formel $tg.\ \varphi = \frac{\cos.\ AP\ .\ \cos.\ BP}{\sin.\ AB}$

$= \frac{\cos.\ (90^\circ - \beta)\ .\ \cos.\ (90^\circ - \alpha)}{\sin.\ p}$ ist.

Beyspiel: Die geographischen Breiten der Orte A und B seyen 43° 50′ und 48° 8′, deren Entfernung von einander $126\frac{1}{2}$ geographische Meilen oder 8° 26′ beträgt, wie groß ist ihr Längenunterschied DE = ϱ?

$$\cos.\ \varrho = \frac{\cos.\ (8^\circ\ 26' + \varphi)}{\sin.\ 46^\circ\ 10' \times \sin.\ 41^\circ\ 52' \times \cos.\ \varphi}.$$

Da $tg.\ \varphi = \frac{\cos.\ 46^\circ\ 10' \times \cos.\ 41^\circ\ 52'}{\sin.\ 8^\circ\ 26'}$, und

log. cos. 46° 10′ = 0,84046 — 1
log. cos. 41° 52′ = 0,87198 — 1
D. E. log. sin. 8° 26′ = 0,83369

mithin log. tg. φ = 0,54613 und
φ = 74° 7′ 37″

Folglich ist $\cos.\ \varrho = \frac{\cos.\ 82^\circ\ 33'}{\sin.46^\circ 10' \times \sin.41^\circ 52' \times \cos.74^\circ 7' 37''}.$

Nun ist log. cos. 82° 33′ = 0,11281 — 1

D. E. { log. sin. 46° 10′ = 0,14185
log. sin. 41° 52′ = 0,17561
log. cos. 74° 7′ 37′ = 0,56271 }

also log. cos. ϱ = 0,99298 — 1
und endlich ϱ = 10° 17′.

Zusatz:

Ist zu den hier gegebenen Stücken auch noch die geographische Länge eines der beyden Orte bekannt, so ist es auch die des andern; denn bezeichnet man die Länge von A mit δ und jene von B mit γ, so ist $\delta = \gamma - \varrho$ und $\gamma = \delta + \varrho$.

§. 98.

III. Ein Schiff segelt ab, und soll seine Richtung gerade gegen seinen Bestimmungsort nehmen, dessen Entfernung bekannt ist, schlägt diese Richtung aber gleich anfangs falsch ein, und bemerkt selbes erst, als es sich schon auf einer gewissen Höhe befindet; unter welchem Winkel muß es nun seinen Weg verändern, um gerade auf den Bestimmungsort zuzukommen, und wie weit hat es noch dahin?

Auflösung: (Fig. 36.) Das Schiff soll von A nach B segeln, und die Richtung AB $= \delta$ nehmen, schlägt aber die Richtung AD $= \beta$ ein; erst nachdem es in die Höhe von D kömmt, welcher Punkt eine geographische Länge von AF und eine Breite von DF hat, bemerkt es seinen begangenen Fehler, und will den nächsten Weg BD $= \alpha$, Bogen eines größten Kugelkreises, nach B nehmen. Es sind demnach BD $= \alpha$ und ADB $= \tau$ die zu suchenden Stücke. Da man auch die geographische Lage des Bestimmungs-Ortes B kennen wird, so erhält man in EF $= \varrho$ den Längenunterschied der Orte B und D, und man findet aus den bekannten Stücken BD nach §. 96.

Nun hat man im $\triangle$ ABD alle drey Seiten bekannt, und es ist aus denselben nach §. 68 Zus. 2

$$\cos. ADB = \frac{\cos. (AB + \varphi)}{\sin. AD \,.\, \sin. BD \,.\, \cos. \varphi} \text{ oder}$$

$$\cos. \tau = \frac{\cos. (\delta + \varphi)}{\sin. \beta \,.\, \sin. \alpha \,.\, \cos. \varphi}, \text{ worin}$$

$$tg. \varphi = \frac{\cos. \alpha \,.\, \cos. \beta}{\sin. \delta} \text{ ist.}$$

§. 99.

IV. Ein Schiffer hat gefunden, daß er einen Weg AB = δ (Fig. 37) zurückgelegt, und nach dem Kompas um den Winkel BAD = γ von dem Mittagskreise NAS östlich gesteuert hat; um wie viel ist er nördlich gekommen, wenn N und S die beyden Pole sind?

Auflösung: Man lege durch B einen größten Kugelkreis EDBF senkrecht auf AN, so entsteht das rechtwinklige Dreyeck ADB, in welchem, wenn man das zu suchende Stück AD = β setzt,

$$\text{tg.}\ \beta = \cos.\ \gamma\ .\ \text{tg.}\ \delta$$ (§. 66 Zus. 2).

Zusätze:

1) Will man nun aus den in der Aufgabe bekannten Stücken auch bestimmen, wie weit dieses Schiff östlich gekommen ist, so muß DB gesucht werden, welches nach §. 60 Zus. 1 aus folgender Gleichung gefunden wird:

$$\sin.\ DB = \sin.\ \gamma\ .\ \sin.\ \delta.$$

2) Aus der Formel tg. β = cos. γ . tg. δ entstehen noch folgende: für die Entfernung von A nach B

$$\text{tg.}\ \delta = \frac{\text{tg.}\ \beta}{\cos.\ \gamma},$$

und für den Winkel, um welchen die genommene Richtung des Schiffes von dem Mittagskreise des Ortes A abgesteuert ist,

$$\cos.\ \gamma = \frac{\text{tg.}\ \beta}{\text{tg.}\ \delta}.$$

3) Aus der Formel sin. DB = sin. γ . sin. δ wird

$$\sin.\ \delta = \frac{\sin.\ DB}{\sin.\ \gamma} \text{ und } \sin.\ \gamma = \frac{\sin.\ DB}{\sin.\ \delta}.$$

Beyspiele:

1) Gesetzt, der Schiffer hätte von A nach B eine Strecke von 310 geographischen Meilen zurückgelegt, und

N. O. $\frac{1}{4}$ N, oder 33° 45′ östlich, gesteuert, so erhält man δ = 310 Meilen = 20° 40′ und γ = 33° 45′, folglich, um zu suchen, wie weit er nördlich gekommen ist, tg. β = cos. 33° 45′ × tg. 20° 40′.

Nun ist log. cos. 33° 45 = 0,91985 — 1
log. tg. 20° 40′ = 0,57658 — 1

also log. tg. β = 0,49643 — 1,
woraus β = 17° 24′ 47″ folgt.

2) Soll man unter den in dem ersten Beyspiele gegebenen Stücken auch suchen, wie weit das Schiff in dem größten Kugelkreise östlich gekommen ist, so sage man nach Zus. 1 ist sin. DB = sin. 33° 45′ × sin. 20° 40′, woraus DB = 11° 18′ 27″ folgt.

3) Ein Schiff soll eine Strecke AB von 375 geographischen Meilen zurücklegen; welche Richtung muß es von A aus einschlagen, wenn B von dem Mittagskreise durch A um 15° 32′ im größten Kugelkreise östlicher liegt?

Hier gibt der Winkel BAD = γ die zu nehmende Richtung an, und es ist AB = δ = 375 Meilen = 25° und BD = 15° 32′, mithin nach Zus. 3

$$\sin.\ \gamma = \frac{\sin.\ 15^\circ\ 32'}{\sin.\ 25^\circ}, \text{ woraus}$$
$$\gamma = 39^\circ\ 19'\ 16'' \text{ ist.}$$

§. 100.

V. Aus der Deklination eines Sterns, seiner Höhe und Polhöhe das Azimuth zu finden.

Auflösung: (Fig. 32.) BED sey der Horizont und ZAB der Meridian des Standortes C, AGQ der Aequator und α der fragliche Stern, so ist αG die Deklination, αE die Höhe, DP die Polhöhe dieses Sterns und BE sein Azimuth. Nun ist αP = 90° — αG, αZ = 90° — αE und

PZ $= 90^\circ - DP$, folglich sind in dem $\triangle\ \alpha PZ$ die drey Seiten bekannt, und es kann nach §. 68 Zus. 2 hieraus der Winkel αZP gefunden werden. Da nun BZE als Azimuthalwinkel das Maas des Azimuths BE angibt, und sich BZE und αZP auf 180° ergänzen, so ist endlich BE $= 180^\circ - \alpha ZP$.

Zusatz:

Da αZ die Zenithdistanz, αP die Polardistanz und PZ $= 90^\circ - DP$ ist, so kann man auf dieselbe Art auch aus der Zenithdistanz eines Sterns, der Polardistanz desselben und der Polhöhe des Standortes das Azimuth des Sternes finden.

Beyspiele:

1) (Fig. 32.) Die nördliche Deklination eines Sternes α sey $\alpha G = 13^\circ\ 24'$, seine Polhöhe $DP = 48^\circ\ 8'$; wie groß ist bey der Höhe $\alpha E = 41^\circ\ 12'$ sein Azimuth BE?

Es ist $\alpha P = 90^\circ - \alpha G = 90^\circ - 13^\circ\ 24' = 76^\circ\ 36'$

$\alpha Z = 90^\circ - \alpha E = 90^\circ - 41^\circ\ 12' = 48^\circ\ 48'$

und $PZ = 90^\circ - DP = 90^\circ - 48^\circ\ 8' = 41^\circ\ 52'$,

folglich nach §. 68 Zus. 2

$$\cos.\ \alpha ZP = \frac{\cos.\ (76^\circ\ 36' + \varphi)}{\sin.\ 48^\circ\ 48' \times \sin.\ 41^\circ\ 52' \times \cos.\ \varphi}$$

worin $\text{tg.}\ \varphi = \frac{\cos.\ 48^\circ\ 48' \times \cos.\ 41^\circ\ 52'}{\sin.\ 76^\circ\ 36'}$ ist.

Da $\log.\ \cos.\ 48^\circ\ 48' = 0{,}81868 - 1$

$\log.\ \cos.\ 41^\circ\ 52' = 0{,}87198 - 1$

D. E. $\log.\ \sin.\ 76^\circ\ 36' = 0{,}01199$

so ist $\log.\ \text{tg.}\ \varphi = 0{,}70265 - 1$

und $\varphi = 26^\circ\ 45'$.

Mithin ist

$$\cos.\ \alpha ZP = \frac{\cos.\ 103^\circ\ 21'}{\sin.\ 48^\circ\ 48' \times \sin.\ 41^\circ\ 52' \times \cos.\ 78^\circ\ 47'}$$

$$\log.\cos.\,103^\circ\,21' = \log.\cos.\,76^\circ\,39' = 0{,}36342-1$$

$$\text{D. E.}\left\{\begin{array}{l}\log.\sin.\,48^\circ\,48' = 0{,}12354\\ \log.\sin.\,41^\circ\,52' = 0{,}17561\\ \log.\cos.\,26^\circ\,45' = 0{,}04916\end{array}\right.$$

$$\log.\cos.\,\alpha ZP = 0{,}71177-1.$$

Diesem entspräche eigentlich ein Winkel von 59° 5′; weil aber das in der Rechnung vorkommende Glied cos. 103° 21′ negativ ist, so wird cos. αZP auch negativ, d. h. αZP ist stumpf, nehmlich gleich 120° 55′. Und endlich BE = 180° — 120° 55′ = 59° 5′, dem Supplemente von αZP.

2) (Fig. 38.) Es soll das Azimuth eines Sternes α gesucht werden, der im Aequator in der Höhe αE von 7° 18′ beobachtet wird, und eine Polhöhe PD von 50° 43′ hat.

Da der Stern α im Aequator liegt, so ist seine Deklination 0, und man erhält die Polardistanz $\alpha P = 90^\circ$, die Zenithdistanz

$$\alpha Z = 90^\circ - 7^\circ\,18' = 82^\circ\,42', \text{ und}$$
$$PZ = 90^\circ - 50^\circ\,43' = 39^\circ\,17';$$

folglich nach §. 68 Zus. 2

$$\cos.\,\alpha ZP = \frac{\cos.\,(90^\circ + \varphi)}{\sin.\,48^\circ\,42' \times \sin.\,39^\circ\,17' \times \cos.\,\varphi}.$$

$$\text{Nun ist } \operatorname{tg}.\,\varphi = \frac{\cos.\,82^\circ\,42' \times \cos.\,39^\circ\,17'}{\sin.\,90^\circ} = \cos.\,82^\circ\,42' \times \cos.\,39^\circ\,17'.$$

$$\log.\cos.\,82^\circ\,42' = 0{,}10402-1$$
$$\log.\cos.\,39^\circ\,17' = 0{,}88875-1$$

$$\log.\operatorname{tg}.\,\varphi = 0{,}99277-2$$
$$\text{und } \varphi = 5^\circ\,37'.$$

Mithin

$$\cos.\,\alpha ZP = \frac{\cos.\,95^\circ\,37'}{\sin.\,82^\circ\,42' \times \sin.\,39^\circ\,17' \times \cos.\,5^\circ\,37'}$$

$$\log.\cos.95^\circ 37' = \log.\cos.84^\circ 23' = 0{,}99066-2$$

$$\text{D. E.}\left\{\begin{array}{l}\log.\sin.82^\circ 42' = 0{,}00353\\ \log.\sin.39^\circ 17' = 0{,}19849\\ \log.\cos.5^\circ 37' = 0{,}00209\end{array}\right.$$

$$\log.\cos.\alpha ZP = 0{,}19477-1$$

woraus $\alpha ZP = 99^\circ$, also $BE = 81^\circ$.

3) (Fig. 38.) Es soll das Azimuth eines Sternes β gefunden werden, wenn derselbe im Horizonte BED liegt, eine Deklination $\beta G = 23^\circ\ 17'$ und eine Polhöhe $DP = 50^\circ\ 43'$ hat.

Weil der Stern im Horizonte liegt, so ist seine Höhe gleich 0, und man erhält die Zenithdistanz

$\beta Z = 90^\circ$, die Polardistanz

$\beta P = 90^\circ - 23^\circ\ 17' = 66^\circ\ 43'$ und

$PZ = 90^\circ - 50^\circ\ 43' = 39^\circ\ 17'$;

folglich darf man hier nur den Winkel βZP berechnen, welcher das Maas des Azimuths $D\beta$ angibt, und man erhält im $\triangle\ \beta ZP$ nach §. 68 Zus. 2

$$\cos.\beta ZP = \frac{\cos.(66^\circ 43' + \varphi)}{\sin.90^\circ \times \sin.39^\circ 17' \times \cos.\varphi},$$

$$= \frac{\cos.(66^\circ 43' + \varphi)}{\sin.39^\circ 17' \times \cos.\varphi}, \text{ worin}$$

$$\text{tg.}\,\varphi = \frac{\cos.90^\circ \times \cos.39^\circ 17'}{\sin.66^\circ 43'} = 0, \text{ d. h. } \varphi = 0^\circ$$

(§. 9). Mithin ist

$$\cos.\beta ZP = \frac{\cos.66^\circ 43'}{\sin.39^\circ 17' \times \cos.0^\circ}$$

$$= \frac{\cos.66^\circ 43'}{\sin.39^\circ 17'}$$

$$\log.\cos.66^\circ 43' = 0{,}59690-1$$

$$\text{D. E. }\log.\sin.39^\circ 17' = 0{,}19849$$

also $\log.\cos.\beta ZP = 0{,}79539 - 1$

woraus βZP oder βD beynahe $= 51^\circ\ 38'$ ist.

§. 101.

VI. (Fig. 39.) AMLQ sey der Aequator und ENLK die Ekliptik; man soll aus der bekannten Schiefe der Ekliptik (aus dem Winkel NLM) die Deklination der Sonne für jeden beliebigen Punkt am Aequator finden.

Auflösung: Der Punkt am Aequator, für welchen die Deklination gesucht werden soll, sey M, so ist MN diese Deklination.

In dem rechtwinkligen Dreyecke LMN ist nach §. 62 dieselbe leicht zu berechnen; denn

$$\text{tg. MN} = \text{tg. NLM} \times \text{sin. LM}.$$

Beyspiel: Es sey LM = 1° und NLM = 23° 27′ 42″ *); wie groß ist MN?

$$\text{tg. MN} = \text{tg. } 23^\circ\ 27'\ 42'' \times \text{sin. } 1^\circ$$

$$\text{log. tg. } 23^\circ\ 27'\ 42'' = 0{,}63751 - 1$$

$$\text{log. sin. } 1^\circ = 0{,}24186 - 2$$

$$\text{log. tg. MN} = 0{,}87937 - 3$$

woraus MN = 0° 26′ 2″ folgt.

Zusätze:

1) Setzt man LM = 2°, so wird MN = 0° 52′ 4″.

2) Für LM = 89° ist MN = 23° 27′ 31″ und für LM = 90° ist MN = 23° 27′ 42″, nehmlich der Schiefe der Ekliptik, weil hier MN = AE das Maas für NLM ist.

---

*) Da la Lande in seiner Astronomie 3 Edition, article 2749 die Verminderung der Schiefe der Ekliptik alljährlich auf eine halbe Sekunde festsetzt, und für das Jahr 1786 diese Schiefe zu 23° 28′ 5″ annimmt, so müßte dieselbe für 1832 um 23″ weniger, nehmlich 23° 27′ 42″ betragen.

3) Man sieht hieraus, daß die Deklinationen der Sonne von den Equinoktien an gegen die Solstitien in einem gewissen Verhältnisse zunehmen müssen, ihre Veränderungen aber in der Art abnehmen, daß dieselben um die Equinoktien 26′ 2″, um die Solstitien aber nur 11″ betragen.

§. 102.

VII. (Fig. 39.) Man soll aus der bekannten Schiefe der Ekliptik und der Deklination der Sonne im Punkte N die Sonnenlänge für diesen Punkt, d. h. das Stück LN finden.

Auflösung: In dem rechtwinkligen Dreyecke LMN ist NLM als die Schiefe der Ekliptik und MN als die Deklination gegeben, folglich

$$\sin. LM = \frac{\sin. MN}{\sin. NLM} \text{ (§. 60 Zus. 1).}$$

Beyspiel: Es sey NLM = 23° 27′ 42″ und MN = 1°; wie groß wird LM?

$$\sin. LM = \frac{\sin. 1^\circ}{\sin. 23^\circ\ 27'\ 42''}$$

$$\begin{array}{rcl} & & +1 \qquad -1 \\ \log. \sin. 1^\circ & = & 0{,}24186 - 2 \\ \log. \sin. 23^\circ\ 27'\ 42'' & = & 0{,}60003 - 1 \\ & & - \qquad + \\ \hline \log. \sin. LM & = & 0.64183 - 2 \end{array}$$

woraus LM = 2° 30′ 45″ ist.

Zusätze:

1) Für MN = 2° wird LM = 5° 1′ 44″, für MN = 22° wird LM = 70° 12′ 13″, und für MN = 23° 27′ 42″ wird LM = LE = 90°.

2) Es gehört demnach für jeden Grad der Veränderung in der Deklination eine Veränderung in der Länge der Sonne, welche um die Equinoktien ohngefähr 2° 31′ und um die Solstitien 19° 47′ 47″ beträgt.

§. 103.

VIII. Die vertikale Fläche einer Mauer weiche von Süd gegen Ost um x ab, und die Polhöhe des Ortes sey y; wie groß muß die Zeigerhöhe und der Winkel der Substylarlinie mit der Vertikallinie bey einer auf diese Wand zu zeichnenden Sonnenuhr seyn?

Auflösung: (Fig. 34.) MN sey die Ebene einer Vertikalwand, WP der Zeiger, ZN die Vertikal- und SP die Substylarlinie, so ist der Flächenwinkel der Ebenen MN und WPQ der Abweichungswinkel der Uhr. Da WP (Fig. 34) parallel mit der Weltachse WP (Fig. 32) und ZN (Fig. 34) parallel mit der Vertikallinie ZN (Fig. 32) seyn muß, so ist, weil (Fig. 32) WCN = ZCP = Compl. PD, auch (Fig. 34) WPQ = (Fig. 32) WCN = ZCP = Compl. PD, d. h. WPQ ist immer das Complement von der Polhöhe des Ortes.

Denkt man sich nun das rechtwinklig-sphärische Dreyeck WLQ auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius PW = PL = PQ ist, so ist in demselben WQL = x, WQ = WPQ = 90° — y und WLQ der rechte Winkel; von den übrigen Stücken dieses Dreyeckes ist WL die Zeigerhöhe und LQ das Maas für den Winkel der Substylarlinie mit der Vertikallinie.

Nach §. 60 Zus. 1 ist

$$\sin. LW = \sin. WQ \,.\, \sin. Q = \sin. (90° - y) \times \sin. x,$$

und nach §. 63 ist

$$tg. LQ = tg. WQ \,.\, \cos. Q = tg. (90° - y) \times \cos. x.$$

Beyspiel: (Fig. 34.) Die Fläche einer Vertikaluhr weiche von Süd gegen Ost um 73° 30′ ab; wie groß muß die Zeigerhöhe und der Winkel der Substylarlinie mit der Vertikallinie dieser Uhr seyn, wenn die Polhöhe des Ortes 48° 8′ ist?

Hier ist x = 73° 30′ und y = 48° 8′, mithin WQ = 90° — 48° 8′ = 41° 52′, und man erhält

sin. LW = sin. 41° 52′ × sin. 73° 30′

log. sin. 41° 52′ = 0,82439 — 1
log. sin. 73° 30′ = 0,98174 — 1

log. sin. LW = 0,80613 — 1
woraus LW = 39° 47′ 8″ folgt.

Und tg. LQ = tg. 41° 52′ × cos. 73° 30′

log. tg. 41° 52′ = 0,95240 — 1
log. cos. 73° 30′ = 0,45334 — 1

log. tg. LQ = 0,40574 — 1
woraus LQ = 14° 16′ 50″.

Es ist demnach die Zeigerhöhe für diese Sonnenuhr 39° 47′ 8″ und der Winkel, den die Substylarlinie mit der Vertikallinie macht, 14° 16′ 50″.

§. 104.

IX. Um wie viel Uhr fällt der Schatten des Zeigers in die Substylarlinie einer vertikalen Sonnenuhr, wenn die Zeigerhöhe an derselben gleich 39° 47′ ist, und was beträgt die geographische Länge derjenigen Orte, in welchen zu dieser Zeit Mittag fällt, wenn der Standort unter 41° 52′ nördlicher Breite und 29° 10′ östlicher Länge liegt?

Auflösung: (Fig. 34.) Es sey WP der Zeiger, SP die Substylarlinie und ZN die Vertikallinie der Sonnenuhr, und man denke sich das rechtwinklig-sphärische

Dreyeck WLQ auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius WP = LP = QP ist, so ist WL = 39° 47′.

Der Winkel WPQ, welchen der Zeiger mit der Vertikallinie macht, ist das Complement von der Polhöhe des Ortes (§. 103); es ist aber auch die geographische Breite eines Ortes dem Complement seiner Polhöhe gleich, mithin ist hier WQ = 41° 52′. Um zu erhalten, wenn der Schatten des Zeigers in die Substylarlinie fällt, suche man aus den zwey bekannten Stücken WL und WQ den eingeschlossenen sphärischen Winkel LWQ.

Nach §. 66 ist

$$\cos. LWQ = \frac{tg. LW}{tg. WQ} = \frac{tg. 39^\circ 47'}{tg. 41^\circ 52'}.$$

$$\begin{array}{lrl} & +1 & -1 \\ \text{Nun ist log. tg. } 39^\circ 47' = & 0{,}92048 & -1 \\ \text{log. tg. } 41^\circ 52' = & 0{,}95240 & -1 \\ & - & + \\ \hline \text{also log. cos. } LWQ = & 0{,}96808 & -1 \\ \text{und } LWQ = & 21^\circ 42'. & \end{array}$$

Dieses in wahrer Zeit ausgerechnet, gibt
360° : 24 Stunden = 21° : x Stunden, woraus
x = 1 Stunde 24 Minuten ist; und
15′ im Bogen : 1′ in der Zeit = 42′ im Bogen : y in der Zeit, woraus y = 2 Minuten 48 Sekunden in der Zeit ist.

Es wird demnach, wenn die Abweichung der Wand, auf welcher sich die Uhr befindet, von Süd gegen Ost statt findet, der Schatten des Zeigers um 1 Uhr 26 Minuten 48 Sekunden Nachmittags, und wenn diese Abweichung von Süd gegen West statt findet, um 10 Uhr 33′ 12″ Vormittags in die Substylarlinie SP fallen.

Die Orte, in welchen es um erstere Zeit erst Mittag wird, liegen um 21° 42′ westlicher als der Standort, nehmlich unter 7° 28′, und jene, in welchen es um letztere Zeit schon Mittag wird, um 21° 42′ östlicher als der Standort, nehmlich unter 50° 52′ östlicher Länge.

Druckfehler,

welche in einigen Exemplaren aus Versehen stehen geblieben sind, und der Studierende abzuändern beliebe.

Seite 66 Zeile 7 von oben lies: ACED statt: ACFG.
„ 96 „ 2 von unten: Von hier aus ändere das Nachfolgende wie nachstehend ab:

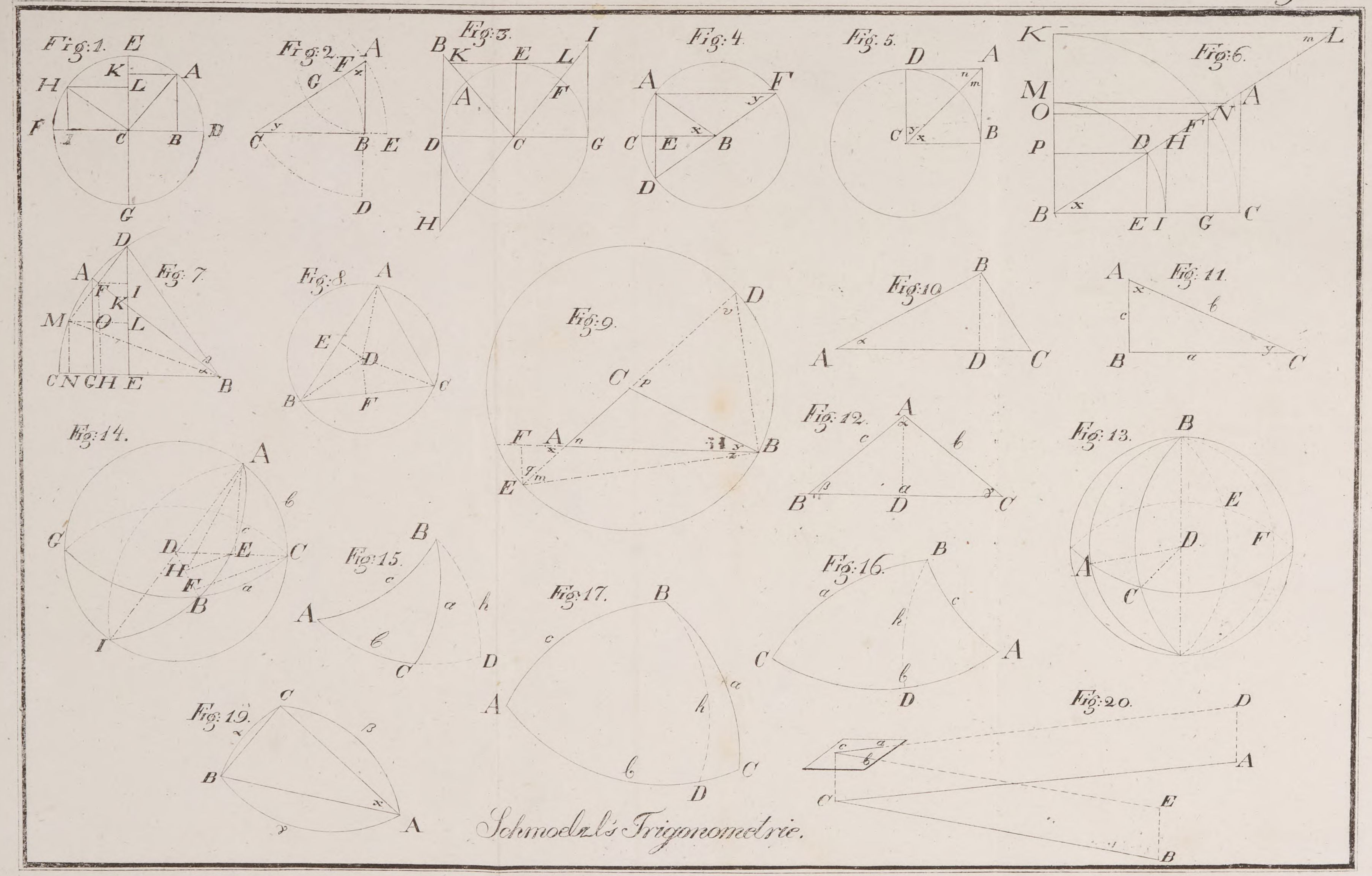
mithin log. (112500. cos. 68° 25′) = 4,61683, woraus
112500. cos. 68° 25′ = 41384.

Es ist also AB = $\sqrt{62500 + 50625 - 41384}$
= $\sqrt{71741}$ = 267,8.

Nämlich AB = 267,8 Fuß.

Seite 104 Zeile 4 von oben lies: 4° 40′ 18″ statt: 4° 53′ 18″ welches das ganze Beyspiel durch gilt.

Seite 107	Zeile 5 von unten	lies:	Jki	statt Jgi
„ 112	„ 8 u. 11 v. o.	„	MO	„ MN
„ 115	„ 3 u. 8 v. u.	„	74°7′7″	„ 74°7′37″
„ 116	„ 19 von oben	„	MF	„ AF
„ 124	„ 11 „ „	„	MO	„ MN



Schmoedzl's Trigonometrie.

Taf. II.

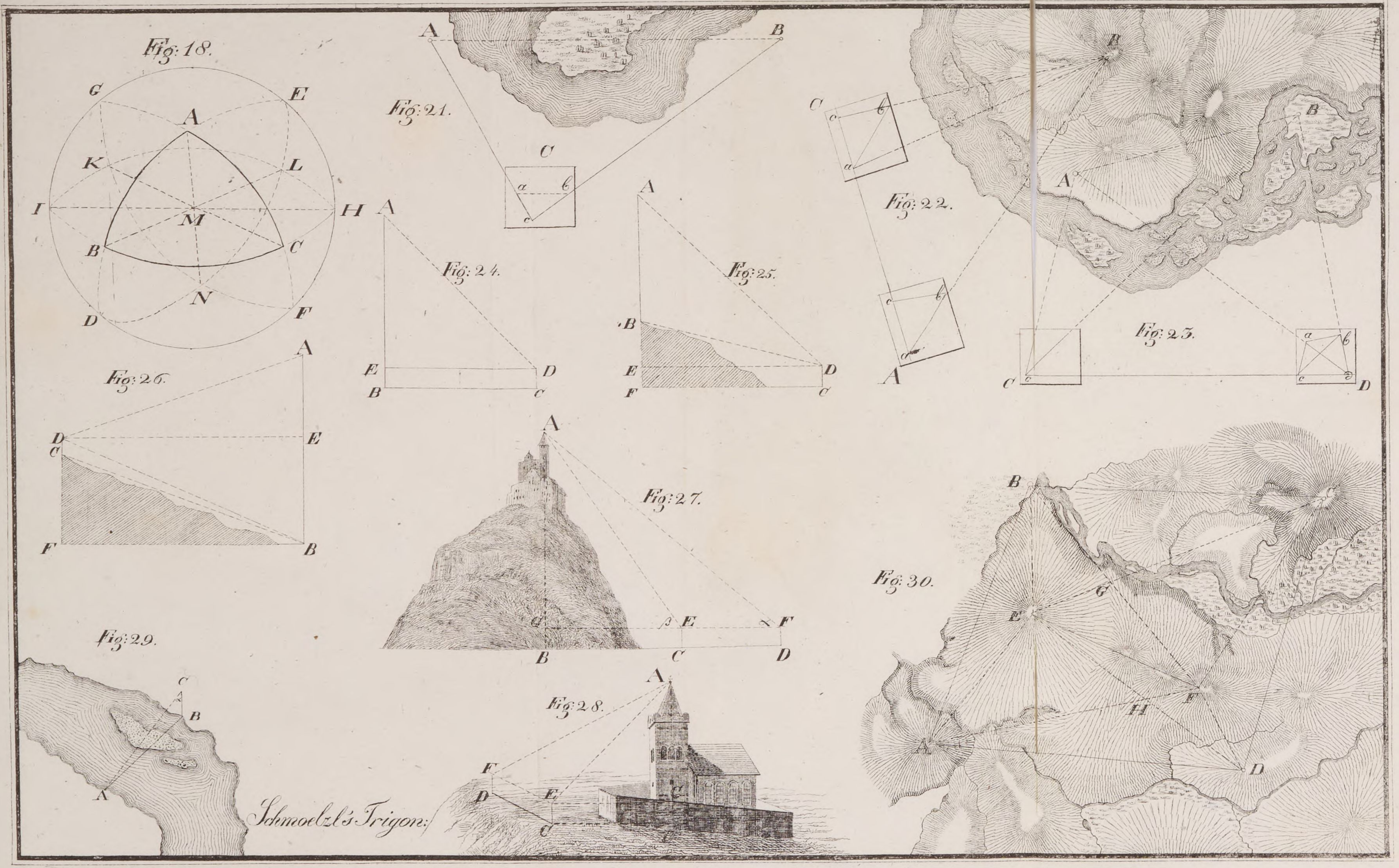


Fig: 18.
G
E
A
K
L
I
M
H
B
C
D
N
F
Fig: 21.
A
B
C
a
b
c
Fig: 22.
Fig: 23.
Fig: 24.
Fig: 25.
Fig: 26.
Fig: 27.
Fig: 28.
Fig: 29.
Fig: 30.
Schmoelzl's Trigon:

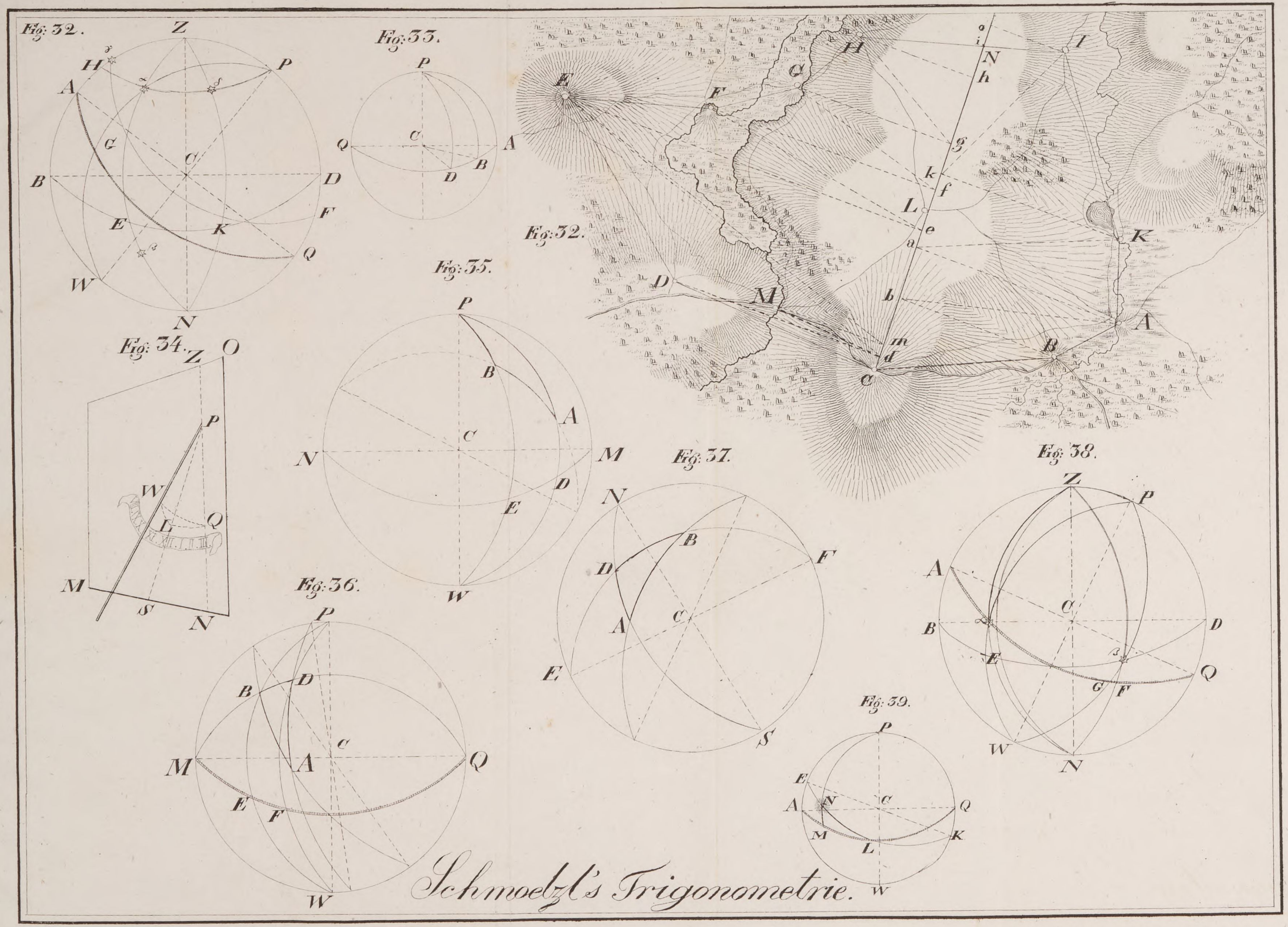


Fig: 32.
Fig: 33.
Fig: 32.
Fig: 34.
Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 37.
Fig: 38.
Fig: 39.
Schmoelzl's Trigonometrie.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schmölzl, Josef,

Die reine und angewandte Elementar-Mathematik ein vollstaendiges Lehrbuch zum Selbstunterrichte und zum Gebrauche bey Vorlesungen in Civil- und Militaerschulen
Bd.: 3

1833

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.47(3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739669-1